第 46 卷 第 4 期
2023 年 4 月

核 技 术 NUCLEAR TECHNIQUES
www.hjs.sinap.ac.cn

Vol.46，No.4
April 2023

涡旋场中的强作用物质相变

姜 寅[1,2] 廖劲峰[3]

1（北京航空航天大学 北京 100083）

2（北京航空航天大学 杭州创新研究院（余杭） 杭州 310023）

3（美国印第安纳大学 物理系 布卢明顿 IN47405）

摘要 强作用物质相结构的研究是核物理里一个非常活跃的前沿领域，对于理解相对论重离子碰撞实验和中子星观测有重要意义。传统的相结构研究集中于高温度和高密度所带来的物性变化，特别是相关的相变过程，比如手征恢复相变、色超导相变等。近年的实验和理论研究表明，非对心重离子碰撞系统携带很大的初始角动量从而产生极强的流体涡旋场。这带来了涡旋场中的强作用物质性质的一系列重要问题，对它们的探索产生了许多新颖结果。特别是在强作用物质相变方面，基于转动参考系的热场计算得到了发展，并结合平均场近似对相关的手征相变、色超导相变、高同位旋下的超流相变等现象作了深入研究，发现了涡旋场对相边界的影响以及其所带来的丰富相结构。

关键词 相对论重离子碰撞，夸克胶子等离子体，流体涡旋，自旋极化，手征相变，色超导

中图分类号 TL99

DOI: 10.11889/j.0253-3219.2023.hjs.46.040011

Phase transitions of strong interaction matter in vorticity fields

JIANG Yin[1,2] LIAO Jinfeng[3]

1(*Beihang University, Beijing 100083, China*)

2(*Hangzhou Innovation Institute Yuhang, Beihang University, Hangzhou 310023, China*)

3(*Physics Department, Indiana University, Bloomington, IN47405, USA*)

Abstract Understanding the phase structures of strong interaction matter is an active frontier in nuclear physics research currently, and it will provide crucial insights into heavy-ion collision experiments as well as neutron star observations. Most studies in this area focus on the influence of extremely high temperatures and baryon densities on matter properties, especially pertaining to phase transitions such as the chiral symmetry breaking and color superconductivity. Recent experimental and theoretical studies reported that in non-central heavy-ion collisions, systems carry a large initial angular momentum that becomes very strong vorticity fields in the bulk fluid. This has thus introduced several new questions regarding the properties of strong interaction matter under vorticity fields, and have led to many novel results. Thermal field theory calculations based on rotating frame and mean-field approximation have been developed to study various phase transitions under rotation, such as chiral symmetry breaking, color superconductivity and superfluidity at high isospin asymmetry. The results have demonstrated important impacts of vorticity fields on the phase boundaries of these transitions, and have also revealed nontrivial new phase structures of strong interaction matter under rotation. A new dimension of the usual QCD phase diagram has been unveiled. The study of rotation-induced phase transition extends phase transition research to a broader

国家自然科学基金(No.11875002)资助

第一作者：姜寅，男，1986年出生，2013年于清华大学获博士学位，研究领域为高能核物理，E-mail：jiang_y@buaa.edu.cn

收稿日期：2023-01-31，修回日期：2023-03-13

Supported by National Natural Science Foundation of China (No.11875002)

First author: JIANG Yin, male, born in 1986, graduated from Tsinghua University with a doctoral degree in 2013, focusing on high energy nuclear physics, E-mail: jiang_y@buaa.edu.cn

Received date: 2023-01-31, revised date: 2023-03-13

space. There remain more unexplored issues that merit further study.

Key words Heavy-ion collision, Quark-gluon plasma, Fluid vorticity, Spin polarization, Chiral symmetry breaking, Color superconductivity

可见物质世界的绝大部分质量由核子携带，核子由带有色荷的夸克和胶子构成，它们之间的强相互作用由量子色动力学(Quantum Chromodynamics，QCD)这一非阿贝尔规范场论来描述。QCD是标准模型的主要组成部分之一，同时也是这个庞大的统一模型中依旧具有浓烈的神秘色彩的部分。微扰计算显示，随着相互作用能标的增大，色动力学的耦合常数将不断减小，这一现象被称为渐近自由。而在低能区域，由于从未观测到自由的夸克或胶子，人们相信这个区域的相互作用应该很强，能够将带有色荷的夸克和胶子紧紧地束缚在色中性的强子内部。这一猜想被称为颜色的禁闭或囚禁。至今，色荷的禁闭仍是未被数学证明的重要问题。与轻夸克束缚态相关的，人们发现流质量仅有5~10 MeV的轻夸克无法从普通的束缚势角度对过重的核子质量和过轻的π介子质量给出解释。对强子谱的质量分布给出定性理解的是来自于轻夸克手征对称性真空中的自发破缺和轴矢反常的存在。由于少体的核子系统是有限的，色禁闭的存在和对称性的破坏导致核力作为QCD的剩余作用远比QCD本身更为繁杂。因此，以揭示QCD的本质为目标，将夸克胶子构成的多体系统作为研究对象，探索在不同热力学条件下的强作用物质相图成为了进一步深入认识量子色动力学的重要途径[1−5]。以色禁闭和手征对称性为重要切入点，在不同温度和密度下研究强相互作用对称性的破缺和恢复，这是传统QCD相变的重要研究内容。利用格点QCD、Dyson-Schwinger方程和泛函重整化群等非微扰技术，人们发现在小重子化学势区域，手征破坏将随温度的升高而连续恢复，颜色囚禁被打破，核物质中的夸克胶子进入一种相对自由的状态，这种相被称为夸克胶子等离子体(Quark-gluon Plasma，QGP)。在低温区域，重子化学势的存在阻止了格点计算的进行，其他非微扰方案和有效模型的结果显示，核物质的手征依旧会随着化学势的增加而恢复，囚禁解除，夸克之间将发生配对，形成类似传统BCS超导体中的夸克对，这一状态被称为色超导态。由于渐近自由的存在，色超导态在极高化学势下的存在是可以被微扰计算确认的。在中等化学势区域，模型计算暗示体系进入该相经历的是一级相变。由于一级相变牵涉到序参量的不连续跳变，因此，难以从精度有限的非微扰计算来加以确认。所以，现阶段中等化学势区域的相结构依旧是没有解决的问题。相对论重离子碰撞实验可以制造出高温低化学势的QGP物质，通过改变对撞能量和对撞重核种类，有希望实现对相图不同化学势区域的扫描。图1示意了特定温度-重子化学势-旋转空间的QCD相图。如果低温区域的一阶相变线的确存在，那么它和已经确认的高温连续过渡线的交汇处将出现一个二级相变点或者二级相变区域，这一点给人们从实验上探测一级相变线的存在提供了希望。

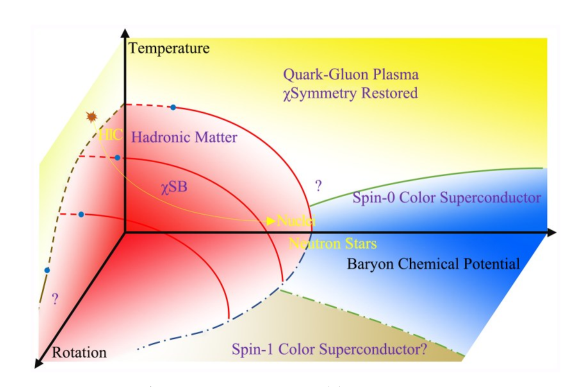


图1 温度-重子化学势-旋转空间的QCD相图[6]
Fig.1 Schematic phase diagram of QCD matter in temperature-baryon chemical potential-rotation axes[6]

重离子碰撞实验观测和唯象模型的模拟计算发现，QGP是人类所创造的物质中具有最高能量密度、最小黏滞系数、最大磁场强度和最剧烈旋转的体系，它是由极高速的重核对撞而产生的。在这个系统中，极高的温度使核物质的基本组分——夸克和胶子的热运动打破了强子的束缚，相对自由的游离于碰撞区域内(尺度约10 fm)，形成可以用流体力学来描写的夸克胶子等离子体。在非对心的相对论重离子对撞实验中，系统本身具有巨大的初始磁场和角动量，产生出来的夸克胶子等离子体往往携带了巨大的磁场和角动量。这些具有明确指向的背景场不仅改变了夸克和胶子的微观行为，而且明显破坏了体系原有的旋转对称性。因此，从连续相变的一般理论可以预计，背景场将对体系的相变过程产生非平庸的影响。研究磁场和涡旋在QCD相变中的效应可以进一步促进强相互作用具体机制的探究。这二者中磁场的研究更早发轫，并取得了很多重要的成果[7−15]。在手征系统中，磁场将对费米子的自旋方向进行极化，从而锁定了动量的方向，产生手征磁效应，进而产生可测量的电荷分离现象。这一现象已在凝聚态系统中被观测到。以手征磁效应为基

础，一批与手征相关的电磁效应被纷纷发现。在具有极大磁场和天然的手征费米子组成的夸克胶子等离子体中，手征磁效应的存在几乎是一定的，但从背景噪声中确认其信号则需要更多的努力。与磁场类似，实验中也观测到存在很强的涡旋场[16-18]；从性质上看，涡旋场也是一个有明确指向的赝矢量场，且对角动量亦具有极化性质，但它与磁场却又不尽相同[19-22]。首先，涡旋是单纯的运动学效应，没有电磁相互作用耦合，因此，它对角动量的极化是一视同仁的，不会有电荷上的区别；其次，涡旋是系统总角动量的重要组成部分，因为角动量守恒的制约，涡旋随体系膨胀的衰减可能会相对磁场更慢，从而提供更多涡旋效应的观测机会；最后，涡旋实际是组成多体系统的粒子单体运动的一部分，而不是像磁场一样是一个独立存在的背景场。这一特点在理论上为研究带来了很大的困难，特别是对于有相互作用的系统，从量子场论的标准途径计算耦合顶角的旋转修正是非常困难的任务，需要发展更为完善和一般性的量子场论技术。因此，在很多模型的研究中，虽然将涡旋引入了拉氏量，但最终还是关注其单体效应，因此等价于将涡旋简化处理成一个独立的背景场，旨在集中讨论它对单体的极化能量所引发的集体效应。与磁场研究的路线平行，人们从量子场论和引力对偶等模型出发，给出了旋转对手征凝聚、π凝聚和色超导的双夸克凝聚以及色禁闭相变的初步结果[23-44]。在平均场层次，这些研究集中计算了涡旋背景对夸克单体能级的影响，给出了旋转对凝聚的修正，发现了涡旋的极化效应将减弱总角动量为0的夸克凝聚而增强自旋为1的配对模式。在单体或少体层面，除了手征费米子在涡旋背景下的输运性质[45-48]，人们还讨论了旋转背景对各种强子束缚态的影响[49-50]，为探测QGP的探针性质给出了修正。对更为复杂的相互作用顶角的旋转修正的问题，近期也出现了一些不依赖于量子场论标准技术的尝试，给出了类似反向磁催化那样不同于平均场的定性结论，在格点中也出现了类似的结果[51]。本综述从如何将旋转背景引入模型开始，陆续介绍平均场近似下的手征、双夸克、π和矢量凝聚结果，同时展示旋转问题所特有的技术细节，比如边界条件和体系非均匀性等特点，最后将介绍考虑QCD相互作用的旋转修正后对手征和解禁闭相变温度的影响。在QCD相变内容之外，本综述也将简单展示涡旋背景下的部分输运、流体和实验等结果[37,52-69]，其中大部分唯象学的研究集中在对QGP火球中涡旋分布的模拟和超子的全局或局域极化的方向[70-76]。这些研究表明用不同的QGP唯象模型可以得到相似的涡旋分布和对碰撞条件的依赖。正反超子的极化是涡旋分布的重要探针，在比较精确地描述了整体极化测量的同时，但对于局域极化实验结果的定量理解仍有待进一步研究。

1 非惯性随动参考系下的量子场论

虽然直观上涡旋场可以视作和磁场类似的背景场，但旋转实际上是体系的整体运动，微观上它不存在和电磁场一样与粒子的相互作用顶角。为了能够将整体的旋转引入系统拉氏量，最为直接的方法是进入和旋转的小区域相对静止的随动参考系进行研究，即研究某个指定局域的热力学性质。以绕z轴匀角速度Ω旋转的系统为例，随动的旋转系中的时空坐标和实验室静止系的变换关系为：

$$\begin{cases} x' = x\cos\Omega t - y\sin\Omega t \\ y' = x\sin\Omega t + y\cos\Omega t \\ z' = z \\ t' = t \end{cases} \tag{1}$$

对应的时空线元可以写为：

$$\mathrm{d}s^2 = \eta_{\mu\nu}\mathrm{d}x'^{\mu}\mathrm{d}x'^{\nu} = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^{\mu}\mathrm{d}x^{\nu} = (1-\Omega^2 r^2)\mathrm{d}t^2 + 2\Omega y\mathrm{d}x\mathrm{d}t - 2\Omega x\mathrm{d}y\mathrm{d}t - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2 \tag{2}$$

要注意的是，旋转的参考系在广义相对论的讨论中也存在着若干微妙之处，与静止系的变换关系也有数种不同选择。比如，上面的变换中还可以考虑相对运动的洛伦兹收缩因子，那么变换关系就会更为复杂。在绝大部分的研究中，人们还是选取上面这种简单的形式对问题进行简化。对于这种形式，可以读出该随动参考系下的度规为：

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1-\Omega^2 r^2 & \Omega y & -\Omega x & 0 \\ \Omega y & -1 & 0 & 0 \\ -\Omega x & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

很显然，这是个非惯性系。按照广义相对性原理，在此参考系中，系统的拉氏量应与平直时空中的形式上没有区别，唯一的差别来源于现在工作的参考系为非惯性系，度规不再平直。平直时空拉氏量中的所有微分算符都应换为相应场量表示下协变微分。以最简单的标量场为例，在非惯性系下场的拉氏量为：

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}\,[|D_\mu\phi|^2 - (m^2+\xi R)|\phi|^2] = -\phi^*[\frac{1}{\sqrt{-g}}D_\mu\left(\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}D_\nu\phi\right) + (m^2+\xi R)\phi] \tag{4}$$

当然，对于标量场协变微分就等于普通微分。对于标量场，由于它不带有自旋，因此不存在单粒子的自旋极化项，而仅有对轨道角动量所处能级的极

化。这一对旋转系统的处理方式在早期的文献[77]中就有涉及。

按自旋的次序，在旋转系中第一个非平庸的场是旋量场。对于旋量表示，协变微分中所涉及的联络为自旋联络，其定义为活动标架联络与自旋张量的收缩：

$$\Gamma_\mu = -\frac{i}{4}\omega_{\mu ij}\sigma^{ij} \tag{5}$$

其中：$\omega_{\mu ij} = g_{\alpha\beta}e_i^\alpha(\partial_\mu e_j^\beta + \Gamma_{\mu\nu}^\beta e_j^\nu)$，$\sigma^{ij} = \frac{i}{2}[\gamma^i, \gamma^j]$。联络可通过度规计算为：

$$\Gamma_{\mu\nu}^\beta = \frac{1}{2}g^{\beta\sigma}\left(\partial_\mu g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}\right) \tag{6}$$

由于非惯性是由旋转引起的，可以预见联络应均是角速度的幂次，实际计算可以证实这一点：

$$\Gamma_{tt}^x = -x\Omega^2,\ \Gamma_{ty}^x = \Gamma_{yt}^x = -\Omega,$$
$$\Gamma_{tt}^y = -y\Omega^2,\ \Gamma_{tx}^y = \Gamma_{xt}^y = \Omega \tag{7}$$

在局域惯性系中协变微分项可以被明确地写为普通微分和度规弯曲项的和，其中度规弯曲的部分就是等价的涡旋场与单粒子的"相互作用项"。活动标架与度规直接相关，它是弯曲度规和局域平直度规之间的变换矩阵，即需要满足：

$$g_{\mu\nu} = e_\mu{}^i e_\nu{}^j \eta_{ij} \tag{8}$$

式中：η_{ij}为平直的闵氏度规。很明显，标架的选择不是唯一的，不同的选取方式仅相差一个局域的坐标旋转，因此对物理结果没有影响。在旋转系下，一个简单的取法为：

$$e_0^t = e_1^x = e_2^y = e_3^z = 1,\ e_0^x = y\Omega,\ e_0^y = -x\Omega \tag{9}$$

在这种取法下旋量场的拉氏量被改写为：

$$\mathcal{L} = \psi^\dagger[i\partial_0 + i\gamma^0\vec{\gamma}\cdot\vec{\partial} + (\vec{\omega}\times\vec{x})\cdot(-i\vec{\partial}) + \vec{\omega}\cdot\vec{S}_{4\times4}]\psi \tag{10}$$

可以看到，旋转对拉氏量的修正项十分明确——自旋和轨道角动量的极化。显然，绕着z轴的旋转对称性保证了相应的本征态和自由情况下的柱坐标解相同，本征能量被极化能量$(n+1/2)\Omega$修正。直接采用标准的正则量子化方案可以得到对应的费曼传播子为：

$$S(\tilde{r};\tilde{r}') = \frac{1}{(2\pi)^2}\sum_n\int\frac{dk_0}{2\pi}\int k_t dk_t\int dk_z \frac{e^{in(\phi-\phi')}e^{-ik_0(t-t')+ik_z(z-z')}}{[k_0+(n+\frac{1}{2})\omega]^2 - k_t^2 - k_z^2 - M^2 + i\epsilon}\times$$
$$\Big\{\Big[[k_0+(n+\frac{1}{2})\omega]\gamma^0 - k_z\gamma^3 + M\Big]\Big[J_n(k_tr)J_n(k_tr')\mathcal{P}_+ + e^{i(\phi-\phi')}J_{n+1}(k_tr')J_{n+1}(k_tr')\mathcal{P}_-\Big] -$$
$$i\gamma^1k_te^{i\phi}J_{n+1}(k_tr')J_n(k_tr')\mathcal{P}_+ - \gamma^2k_te^{-i\phi'}J_n(k_tr')J_{n+1}(k_tr')\mathcal{P}_-\Big\} \tag{11}$$

其中：$\mathcal{P}_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm i\gamma^1\gamma^2)$为投影算符；$\tilde{r} = (t, r, \theta, \phi)$是柱坐标的坐标分量。

利用同样的方法，可以对有质量的矢量场进行研究[78]。这里的协变微分即为通常对矢量的协变微分，即$D_\mu A_\nu = \partial_\mu A_\nu + \Gamma_{\mu\nu\alpha}A^\alpha$。将协变微分明显地写出来，并进入局域惯性系中，即将弯曲时空的矢量通过活动标架投影到局域平直系得分量$A^a = e_\mu^a A^\mu$，最后将拉氏量整理为局域惯性系下场量的函数，即为：

$$\mathcal{L}(\vec{\omega}) = \mathcal{L}(\vec{\omega}=0) + \delta\mathcal{L}(\vec{\omega}) = \mathcal{L}(\vec{\omega}=0) -$$
$$v_jF_{ji}F_{0i} + \frac{1}{2}(v_j\partial_jA_i + \epsilon_{ijm}\omega_mA_j)^2 \tag{12}$$

由于矢量场的拉氏量和哈密顿量都是能量平方的量纲，这里不能像旋量场一样直接看出极化效应，但通过求解运动方程的本征态和本征能量将给出明确的旋转极化能量$n\Omega$。利用正则量子化，可以给出对应的费曼传播子，由于其形式十分复杂，借助符号$\Pi_n = J_n(\rho)J_n(r)$ 和 $Z_n^\pm(\rho,\phi) = J_{n-1}(\rho)e^{-i\phi} \pm J_{n+1}(\rho)e^{i\phi}$，传播子可以写为式(13)。

其中：$M_n^{\pm\pm} = Z_n^\pm(\rho,\phi)Z_n^{\pm*}(r,\theta)$；$N_n^{1\pm} = Z_n^\pm(\rho,\phi)J_n(r)$；$N_n^{2\pm} = J_n(\rho)Z_n^{\pm*}(r,\theta)$。和通常的矢量场量子化的结果一样，当舍去纵向极化并取质量趋于0的极限时，有质量矢量场的传播子可以化为无质量矢量场的结果。可以看到，基于这种形式的传播子，进行进一步的耦合顶角的计算解析上难度是很大的。此外，在局域惯性系中，如何定义被旋转修正过的规范对称性尚缺乏研究。因此，如何按照通常的场论流程来处理旋转系中的规范场并写出相应的自相互作用模型，特别是类似QCD中的规范场p波3线顶角，还需要更多的努力。

从上面的例子可以看到，对于单体问题，无论哪种场，在旋转系下的场方程都是自由场方程的形式，所以旋转引入的修正项不导致新的相互作用，可以被视作和背景磁场一样的外场，其单体的本征态亦和平直时空中柱坐标的结果一致。在平均场近似下，这就表示可以直接利用有限温度场论对相变序参量进行解析计算，得到在不同旋转速度，温度和化学势下的相结构。但要注意的是，在进一步考虑相互作用时，要严格地对此系统进行求解，需要在曲线坐标下重新构建量子场论的计算逻辑。这是因为通常的量子场论是用于散射过程的，即无穷远过去和将来的态均为自由的平面波态，相互作用发生在碰

撞的瞬间。在旋转问题中，这样的假设显然是不合理的，相互作用前后的本征态应为角动量本征态。构成多体系统的粒子处于角动量本征态表明体系存在整体的旋转。进态和出态的变化暗示需要重新构建量子场论的框架，在上述文献中的工作就是对这一问题的初步尝试。在随动坐标系中，单粒子的本征态依旧解析可解，因此可以采用通常的正则量子化方法对其进行量子化并计算费曼传播子。这样的推进流程被阻挡在相互作用部分。由于时空平移对称性的破坏，顶角的计算将涉及3个或更多个贝塞尔函数的积分，相互作用顶角不再能利用能动量守恒关系改写为由本征态的好量子数(能动量)的简单形式。因此，在角动量表象下，相互作用中蕴含的角动量守恒和能量守恒不再具有简单的加减形式。这个系统性的问题有赖于进一步的研究。

$$D^n_{\mu\nu}(k_t,k_z;\rho,r)=\sum_\lambda A_{\mu,\lambda}(k_t,n,k_z;\rho)A^*_{\nu,\lambda}(k_t,n,k_z;r)$$

$$=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&M_n^{++}&-iM_n^{+-}&0\\0&iM_n^{-+}&M_n^{--}&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}+\frac{E_{kt}^2}{4m^2}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&M_n^{--}&-iM_n^{-+}&-2i\frac{k_tk_z}{E_{kt}^2}N_n^{1-}\\0&iM_n^{+-}&M_n^{++}&2\frac{k_tk_z}{E_{kt}^2}N_n^{1+}\\0&2i\frac{k_tk_z}{E_{kt}^2}N_n^{2-}&2\frac{k_tk_z}{E_{kt}^2}N_n^{2+}&4\frac{E_z^2}{E_{kt}^2}\Pi_n\end{pmatrix}+$$
$$\frac{k_tE_k}{2m^2}\begin{pmatrix}\frac{2k^2}{k_tE_k}\Pi_n&-iN_n^{2-}&-N_n^{2+}&-2\frac{k_z}{k_t}\Pi_n\\iN_n^{1-}&0&0&0\\-N_n^{1+}&0&0&0\\-2\frac{k_z}{k_t}\Pi_n&0&0&0\end{pmatrix}\tag{13}$$

2 Nambu-Jona-Lasinio 模型和平均场近似下的QCD相变

手征相变是比较易于用夸克模型进行研究的相变，因为它的序参量是直观的夸克配对，在平均场下容易计算。同样的情况也适用于Pion凝聚、色超导等相变。在单粒子图像下，涡旋对费米子最初级的效应是对角动量的极化，即角动量倾向于向涡旋的方向排列，在经典物理中，这一极化效应表现为著名的进动现象。在量子物理中，费米子的能级将普遍获得正比于总角动量量子数和涡旋大小的能量移动。单粒子的能级移动将进一步影响了单粒子的态密度分布，从而对包括手征凝聚、Pion超流、色超导和矢量介子凝聚等夸克配对凝聚强度发生抑制或增强。研究者们[23–28,30,34–44]利用Nambu-Jona-Lasinio (NJL)模型讨论了这些现象。由于用得比较多的NJL模型四费米子顶角都是s波，不显含动量，因此非惯性系的度规不会引入更多修正。研究手征凝聚、Pion凝聚和双夸克凝聚的NJL模型拉氏量通常取为：

$$\mathcal{L}_{\rm NJL}=\bar\psi(i\gamma^\mu\nabla_\mu-m_0)\psi+G[(\bar\psi\psi)^2+(\bar\psi i\gamma^5\tau\psi)^2]+G_d(i\psi^TC\gamma^5\psi)(i\psi^\dagger C\gamma^5\psi^*)\tag{14}$$

利用有限温度场论，系统的所有热力学信息可以通过计算模型的有效势来得到：

$$Z=\int D[\bar\psi,\psi]\exp\left(i\int{\rm d}^4x\sqrt{-g}\,\mathcal{L}_{\rm NJL}\right)={\rm e}^{-\beta VU_{\rm eff}}\tag{15}$$

在虚时温度场论中，温度的倒数给出虚时间的积分区间，从而将量子的有效势和统计力学中的配分函数联系起来。在平均场近似下，即认为 $\sigma=\langle G(\bar\psi\psi)\rangle$, $\pi=\langle G(\bar\psi i\gamma^5\boldsymbol{\tau}\psi)\rangle$, $\Delta=\langle G_d(i\psi^TC\gamma^5\psi)\rangle$ 为宏观的不依赖于时空的常数，忽略算符乘积高于二阶的涨落时，相互作用问题转化为单体问题，路径积分仅涉及高斯型积分，模型可以解析求解。通过最小化有效势可以得到决定凝聚数值的能隙方程：

$$\frac{\partial U_{\rm eff}}{\partial\sigma}=0,\ \frac{\partial U_{\rm eff}}{\partial\pi}=0,\ \frac{\partial U_{\rm eff}}{\partial\Delta}=0\tag{16}$$

在通常情况下，有效势是显含各个凝聚并依赖于温度、化学势等热力学参量的函数，平均场近似下往往可以得到它的解析形式。通过联立能隙方程可以解得序参量对热力学参量的依赖，从而得到系统的相图。很明显，决定两夸克配对凝聚的能隙方程也可以直接计算费米子的两点关联函数来得到。当然，如果需要计算其他类型的夸克凝聚只需要在NJL中引入相应的四费米子相互作用就可以，计算的流程是几乎一样的。在旋转进入拉氏量后，最自然的是将其处理成一个和化学势地位相同的热力学

量，因为它们都只引入二次项的修正。研究结果也的确表明，在某种意义上平均场层次的旋转极化项和一个化学势项的作用相似，但旋转具有明确的运动学意义，在细节上需要认真地考虑它可能导致的非均匀性和非平庸的边界条件。

2.1 局域势近似和边界条件

要正向地从平均场的拉氏量得到有效势，需要解得费米子的单粒子能级 $\Psi_{\{\xi\}}$，以考虑手征和Pion凝聚的系统为例，系统的本征方程为：

$$\hat{H}\psi = [-i\gamma^0\gamma^i\nabla_i - i\Gamma_t + (m_0+\sigma)\gamma^0 + i\gamma^0\gamma^5\pi\cdot\tau]\psi = E\psi \tag{17}$$

如果手征 σ 和Pion凝聚 π 与时空无关，本征方程是解析可解的。那么有效势可以解析写出为：

$$V_{\text{eff}} = \frac{1}{\beta V}\int d^4x_E\left\{\frac{\sigma^2+\pi^2}{2G} - \sum_{\{\xi\}}\left[\frac{\varepsilon_{\{\xi\}}}{2} + \frac{1}{\beta}\ln\left(1+e^{-\beta\varepsilon_{\{\xi\}}}\right)\right]\Psi^\dagger_{\{\xi\}}\Psi_{\{\xi\}}\right\} \tag{18}$$

显然，在旋转系统中凝聚值不仅大小是未知的，也很有可能存在空间分布，但要得到单粒子能级又反过来需要知道凝聚的分布来确定一个可解的平均场近似下的本征方程。在无旋转的系统中，由于存在时空平移不变性，可以合理地假设凝聚为一个宏观量，它均匀地分布在全空间。然而，实际的经验显示，一个整体旋转的系统最终达到的稳态往往是非均匀的。如果要解析求解单粒子能级，一个可行的方案是引入凝聚缓变的假设，即认为它随空间的变化很慢，从而可以忽略其空间的导数项，只关注于它的零阶分量，即认为：

$$\partial_r^n\sigma(r) \simeq 0,\ n \geq 1 \tag{19}$$

从直观上看，这一近似成立的充分条件为旋转速度足够的缓慢。在大部分的初期工作中，人们更关心相变是否发生而不重视凝聚的分布细节。这一假设可以简化问题，且可以给出符合物理预期的结果，因此多被人们采用。实际上，讨论旋转系统整体的平衡态热力学是比较微妙的问题，特别是在进一步考虑相对论协变和量子修正的情况下。因此，对这个问题更安全的定义是局限在宏观无穷小微观无穷大的局域流元内。在这个小系统中，只要旋转不是特别剧烈，局域势近似就显得比较合理。大部分的定性研究中往往以此类小系统为研究对象而采用局域势近似。对于整体匀速旋转的系统，有限的边界尤其重要，因为在光速极限的制约下体系边缘的速度必须小于光速 $v = R\Omega < 1$。一旦系统的初始转动能量过高，在光速极限的制约下，系统或者向角速度不均匀的分布演化，或者破碎成尺寸更小的多个系统形成涡旋网格的形态。因此，原则上在匀速旋转的体系中考虑边界的存在和引入明确的边界条件是很重要的。然而，如果将研究对象集中于上述提到的局域流元，只要该流元不是恰好处于体系边界，边界条件就不是那么至关重要。在一些研究中，由于人们仅关心相变的定性行为和凝聚变化所引发的后续效应，因此还是直接选择自然边界条件进行计算。在与其他考虑了明确的边界条件的研究比较后发现，有限温度下对相变的定性结论并没有明显地改变。

利用上述计算方法在文献[35]中显示了NJL模型中考虑旋转背景下的手征相变在 T - Ω 平面的相图（图2）。可以看到，由于旋转对手征凝聚的压低效应，手征过渡的"临界"温度随着旋转的变快而降低，到角速度约为0.63 GeV时手征过渡变为一级相变过程。本文对色超导配对也进行了研究，对于总角动量为0的配对得到了类似的结论，其物理原因是显然的。因为旋转的极化能量修正直接出现在单粒子的热分布函数当中。由于手征凝聚为标量凝聚，其中两费米子自旋同向，相对轨道角动量反向，旋转的极化必然导致这两部分的角动量中的一个被抑制，另一个被增强，从而导致手征凝聚的幅度下降；对于标量色超导的双夸克凝聚也可以如此分析。总的来说，两个组分夸克和相对角动量之中如果至少一个的方向与旋转相反，极化能量就会导致抑制效应，从而抑制此种配对凝聚的幅度。反过来说，如果各角动量部分都可以顺着旋转方向排列，则凝聚就会被增强。这一直观的物理图像在不同的研究工作中都得到了证实。

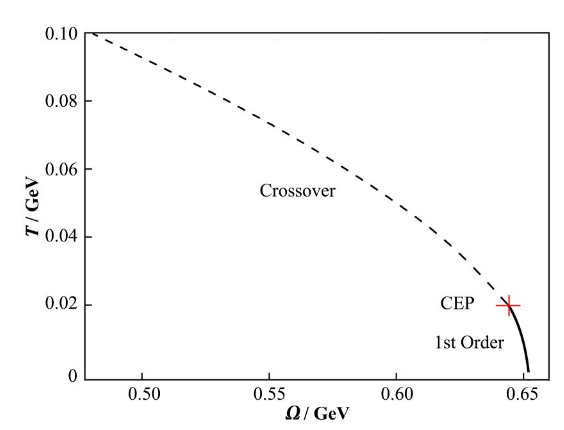


图2　温度-角速度平面的手征相图[6]
Fig.2　Phase diagram of the T - Ω plane[6]

由于旋转在物理上会增强矢量道的凝聚，在NJL中考虑矢量相互作用进一步引起了人们的兴趣。Wang、Chen等[30,40]对含有矢量相互作用 $(\bar{\psi}i\gamma^\mu\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma^\mu\gamma^5\psi)^2$ 的系统相图进行了研究。他们

的计算确认了之前的结果，即在旋转坐标系下，角速度扮演类似重子化学势的角色，抑制手征凝聚。此外他们认真比较了旋转极化和化学势的异同，发现手征相变中的临界终止点（Critical Endpoint，CEP）不仅在温度-化学势平面，还出现在温度-角速度平面。进一步，他们还发现在温度-化学势平面上角速度的存在仅减小CEP的临界温度，不影响临界化学势；而在温度-角速度平面，化学势的增加也只减小临界温度，不改变临界角速度。这表明，在平均场近似下，旋转不仅在手征相变的相图结构上和化学势十分相似，它们之间的相互作用也存在很多相同点。这是与旋转极化抑制手征凝聚密切相关的。由于旋转对矢量凝聚有促进作用，因此可以预期矢量道的相互作用将改变这一相似点。在研究中，他们发现温度-化学势平面的相结构对矢量道耦合强度敏感，而温度-角速度平面的相结构则不然。同时他们也全面计算了系统的多个热力学量，观察到旋转角速度对重子数涨落的抑制和对压力密度、能量密度、比热和声速的促进作用。Zhang等[28]在NJL中同时考虑了手征和Pion凝聚并引入了同位旋的矢量相互作用道$(\bar{\psi}i\gamma^{\mu}\boldsymbol{\tau}\psi)^2$。他们系统研究了有限温度密度下旋转对标量配对的抑制和矢量配对的增强，并给出了相图（图3），由于存在明显破坏同位旋对称性的同位旋化学势存在，系统中的Pion介子将发生玻色-爱因斯坦凝聚形成Pion凝聚。同位旋化学势越大系统中的Pion凝聚将逐步增强并在NJL模型中达到饱和。但上面的结果显示当系统在整体旋转时，Pion凝聚的基态将被破坏。在中等同位旋密度下旋转的出现将抑制Pion凝聚直至其消失，而后进一步增加的角速度将促进矢量凝聚形成，从而形成一个三相点；更特别的是即使仅有很小的旋转，Pion凝聚也会在高同位旋化学势下被破坏，体系将通过一级相变进入矢量凝聚相。新的相图可能会在旋转的高不对称核物质的系统，比如中子星中，存在重要的指导意义。Sun等[29]进一步将NJL模型扩展到三味的情况，集中讨论了旋转对夸克极化的影响。考虑了奇异夸克的模型和对夸克极化的计算对理解实验中的极化测量结果将起到积极的推动作用。

在局域势近似下，考虑不同的边界条件会对相变过程带来一定的修正。其中最为显著的特征被简称为“真空不转”。在边界上可以考虑沿径向的净粒子流为0的条件，即：

$$\int d\theta \bar{\psi}\gamma^{r}\psi\Big|_{r=R} = 0 \tag{20}$$

将此时的本征波函数代入该条件，可以得到沿径向的横动量量子数的量子化为：

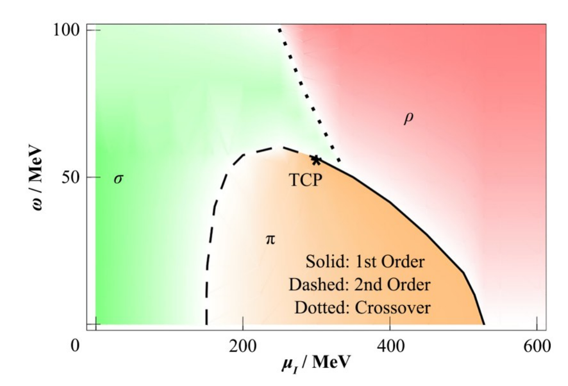


图3 角速度-同位旋化学势平面的QCD相图[28]
Fig.3 Phase diagram of the ω - μ_I plane for QCD[28]

$$p_{l,k} = \begin{cases} \xi_{l,k}R^{-1} & \text{for } l = 0,1,\cdots \\ \xi_{-l-1,k}R^{-1} & \text{for } l = -1,-2,\cdots \end{cases} \tag{21}$$

其中：$\xi_{l,k}$为第l阶贝塞尔函数的第k个零点。如果不考虑边界条件则横动量为零到无穷的连续量子数。在零温下，手征凝聚的能隙方程化为：

$$\sigma = \frac{\sigma}{4G}\int_{-\infty}^{+\infty} dp_z \sum_{l=-\infty}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{[J_{l+1}(p_{l,k}R)]^2R^2}\frac{J_l(p_{l,k}r)^2 + J_{l+1}(p_{l,k}r)^2}{E}\theta(E - |\Omega j|) \tag{22}$$

注意到最后的阶跃函数在本征能量出现非零下界时将恒大于转动引起的能级移动的绝对值：

$$E - \Omega j \geqslant \frac{1}{R}(\xi_{l,1} - \Omega Rj) \geqslant \frac{1}{R}(\xi_{l,1} - j) > 0 \tag{23}$$

因此，阶跃函数将永远为1。这表明，在零温下，旋转不引入任何修正。其中用到了贝塞尔函数零点的结论为：

$$\begin{aligned} \xi_{l,1} &> l + 1.855\,757 l^{1/3} + 0.5 l^{-1/3} \quad \text{for } l \geqslant 1 \\ \xi_{0,1} &= 2.404\,93 > 1/2 \end{aligned} \tag{24}$$

在有限温下，阶跃函数被费米分布所代替，旋转的效应因此得到了体现。真空零温不接受旋转修正的结论对极低温，即绝对零度附近的相结构是重要的，但对于有限温度情形，大量的研究表明，平均场近似下凝聚的定性甚至定量结果并不会受到边界条件的显著影响。

边界条件的选择并不是唯一的，Chernodub和Gongyo在[23,26]中引入了MIT边界条件，其表述为：

$$[i\gamma^{\mu}n_{\mu}(\theta) - 1]\psi\Big|_{r=R} = 0 \tag{25}$$

它的直接结果是要求径向边界上的粒子流在各个方向严格为零，是比上面更为严格的边界条件。在MIT边界条件下，此文也给出了手征凝聚对温度和角速度的变化行为以及相应平面的相图（图4）。这些结果和已知的结果没有定性或者定量上的显著区别。MIT边界条件可以进一步推广，通过引入一个可以人为选择的手征转角Θ可以设置一系列的边界条件：

$$[i\gamma^{\mu}n_{\mu}(\theta)-\mathrm{e}^{-i\Theta\gamma^{5}}]\psi\Big|_{r=R}=0 \tag{26}$$

研究者[23]对这类边界条件进行了研究，结果发现任何手征角Θ下，手征相变温度随角速度的二次函数减小，并且温度-角速度相图中相变线的位置和斜率明显依赖于手征角的值。同时，需要注意的是首先对所有的手征角相变温度都是随角速度下降的；其次不同手征角下相变温度的跨度实际上并不大(约10%)。这再次表明边界条件对相变行为的影响是十分有限的。

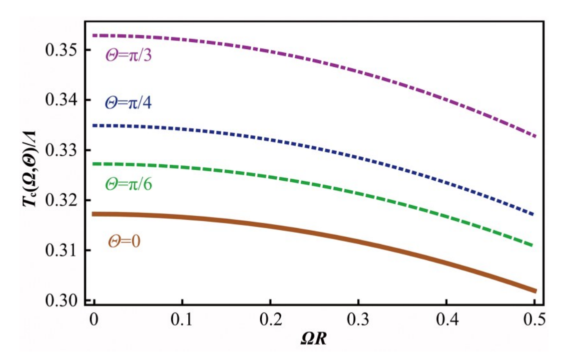


图4 手征MIT边界条件下，在半径为$20/\Lambda$处手征相变温度随角速度变化[23]
Fig.4 Phase diagrams of (T, Ω) plane at the chiral MIT boundary condition for cylinder with radius $R = 20/\Lambda$[23]

2.2 非均匀凝聚的自洽求解

边界条件的讨论引发了对非均匀系统进行数值求解的尝试。除理想刚体外，整体旋转的系统一定会引发内部物质的重新分布，形成非均匀的多体系统。这一点在上面的能隙方程的计算中体现得尤为明显。要得到显式的狄拉克方程本征能级，就需要假设手征凝聚的分布是已知的。在上面的求解中，人们为了简化问题，假设手征凝聚为一待定常数，这样实际上是在一个宏观无穷小但微观无穷大的小区域内对系统进行求解，解出的是距离旋转轴一定横向距离的小系统中的手征凝聚。显然，如果手征凝聚随半径变化缓慢，这样的近似是合理的。由于凝聚的表达式中显含横向位置R，因此局域势近似下也可以给出凝聚随半径的依赖关系。但这种依赖关系很显然是不自洽的也是不可信的，在大角速度的极端条件下，凝聚甚至会在某个半径位置处发生跳变，很明显这样的结果是完全不满足局域势近似的。同时，在实际的夸克胶子等离子体中，不仅体系本身的物质分布就是非均匀的，旋转的离心效应也容易引起很强烈的物质重新分布。因此，探索能够自洽求解体系非均匀性的方法就显得有比较重要的意义。Wang等[27]借鉴冷原子系统的BdG方程，开发了无须基于局域势假设，自洽求解非均匀凝聚的数值方法。BdG方程的构造是比较容易理解的。既然本征方程不能正向求解，那么就选取一组完备函数基来展开未知的本征方程和能隙方程，根据对称性，这组基函数可以直接选为柱坐标下平直时空的解。在严格的边界截断的边界条件$\psi(r=R)=0$下，波函数的展开式为：

$$u_n^{l,\uparrow}=\frac{c_{n,j}^{\uparrow}}{\sqrt{2\pi}}\varphi_{j,l}(r)\mathrm{e}^{i(l+1)\theta},\quad u_n^{l,\downarrow}=\frac{c_{n,j}^{\downarrow}}{\sqrt{2\pi}}\phi_{j,l}(r)\mathrm{e}^{il\theta}$$
$$v_n^{l,\uparrow}=\frac{d_{n,j}^{\uparrow}}{\sqrt{2\pi}}\chi_{j,l}(r)\mathrm{e}^{i(l+1)\theta},\quad v_n^{l,\downarrow}=\frac{d_{n,j}^{\downarrow}}{\sqrt{2\pi}}\xi_{j,l}(r)\mathrm{e}^{il\theta} \tag{27}$$

其中，所选的完备函数基为$\varphi_{j,l-1}(r)=\phi_{j,l}(r)=\chi_{j,l-1}(r)=\xi_{j,l}(r)=c_{jl}J_l(k_tr)$。边界条件给出径向横动量量子化为$k_tR=\alpha_{j,l}$，$\alpha_{j,l}$为$l$阶贝塞尔函数的第$j$个零点。这样就将连续的微分积分方程转化为简单的代数方程，微分方程的本征值问题转化为矩阵的本征问题。进一步，将本征方程和能隙方程联立求解就可以自洽地解得随空间变化的凝聚。这样离散化以后，相应的哈密顿量为按角动量量子数排列的分块对角阵：

$$H=\mathrm{diag}\left(H_1,H_2,\cdots,H_{l_{\max}}\right) \tag{28}$$

其中：

$$H_l=\begin{pmatrix}-K_{l+1}^{jj'} & S_l^{jj'} & \Delta_{l+1}^{jj'} & 0\\ S_l^{j'j} & K_{-l}^{jj'} & 0 & -\Delta_l^{jj'}\\ \Delta_{l+1}^{j'j} & 0 & -K_{l+1}^{jj'} & S_l^{jj'}\\ 0 & -\Delta_l^{j'j} & S_l^{j'j} & K_{-l}^{jj'}\end{pmatrix} \tag{29}$$

其中：$\Delta_l^{j'j}=\int r\mathrm{d}r\sigma(r)\phi_{j,l}(r)\phi_{j',l}(r)$，$K_l^{jj'}=(l-1/2)\int r\mathrm{d}r\omega(r)$和$S_i^{jj'}=\int \mathrm{d}r\phi_{j,1+1}(r)(l-r\partial_r)\phi_{j',j}(r)$。

在这样的系统中，不仅可以求得整体旋转系统的凝聚分布，还可以引入更为现实的非均匀的角速度分布，比如像QGP一样在中等半径位置涡旋最大的角速度和仅有中间部分高速旋转的系统。数值计算的结果表明，非均匀的角速度分布将引发两类效应，其一是角速度本身对手征凝聚的抑制，即在角速度大的位置手征凝聚明显小于角速度小的位置；其二是角速度的梯度对手征凝聚有增强效应，即在角速度快速下降的区间，手征凝聚明显大于角速度保持平稳的区域(图5)。

2.3 与磁场的联合效应

磁场和旋转有着很多相同点，比如它们都是赝矢量场，都对角动量有极化效应等。但它们又不尽相同，最显著地表现在背景磁场是独立存在的客体，与体系的带电粒子有实在的QED相互作用顶角；而旋转是系统的集体运动，不存在微观的相互作用机制。经典电动力学显示，圆周运动的电荷可以产生

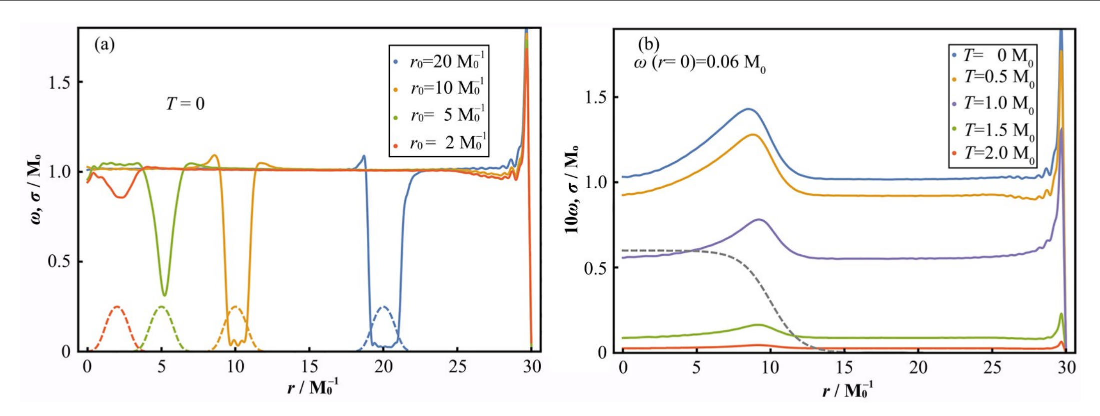


图5 角速度分布分别取$\omega = 0.5[\exp(1.5(r - r_0)^2) + 1]^{-1}$ (a)和$\omega = 0.06[\exp(r - 10) + 1]^{-1}$ (b)时手征凝聚随径向位置的变化[27]

Fig.5 Radial dependence of chiral condensate for different rotations of $\omega = 0.5[\exp(1.5(r - r_0)^2) + 1]^{-1}$ (a) and $\omega = 0.06[\exp(r - 10) + 1]^{-1}$ (b)[27]

磁场，而磁场可以驱动垂直于它运动的电荷做圆周运动，因此旋转和磁场之间也存在着相互转化，相互竞争或促进关系。研究同时存在背景磁场和旋转的体系一度成为研究的热点。在夸克模型，尤其是NJL模型中同时考虑两者的贡献是比较简单的，除了引入非惯性参考系的度规外，通过通常的最小耦合引入磁场即可。自由费米子所满足的运动方程为：

$$[i\gamma^\mu(\partial_\mu + iqA_\mu + \Gamma_\mu) - m]\psi(x) = 0 \tag{30}$$

当考虑s波的相互作用时，旋转度规不引入更多修正，相互作用项与通常平直时空下的无异。Chen等[34]考虑了标量和赝标量的相互作用道，利用上面同样的技术可以得到同时具有背景磁场和旋转的有效势为：

$$V_{\mathrm{eff}}(m) = \frac{(m - m_{\mathrm{current}})^2}{2G} - \frac{T}{S}\sum_{q=\pm}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}p_z}{2\pi}\sum_{n,l,s_z}\left\{\begin{array}{l}\frac{\beta(\varepsilon + q\Omega j)}{2} + \\ \ln[1 + \mathrm{e}^{-\beta(\varepsilon + q\Omega j)}]\end{array}\right\} \tag{31}$$

其中：$\varepsilon = \sqrt{p_z^2 + (2n + 1 - 2s_z)eB + m^2}$。

文中讨论了不同耦合常数取值下的两种相变曲线（图6）。研究者发现沿着角速度方向手征相变的行为无论在强、弱耦合下都是相似的，即随着角速度的增加而减少。这一点和温度的作用十分相似。当沿着磁场方向时，不同耦合的情况就截然不同。在弱耦合情形，手征凝聚随着磁场的增加而增加，呈现通常的磁催化效应，手征相变的临界角速度因此也随着磁场的增加而增加；在强耦合情形下，手征凝聚却显示随着磁场的增加而减小，同时临界角速度的变化行为也正相反，随着磁场的增加而减小，显示出类似“反向磁催化”的特征。这样的行为可以通过对朗道能级的分析来理解。在弱耦合时，参与作用的为较低的朗道能级，这些能级携带的角动量也小。因此在给定的角速度下，角速度的极化效应也相应比较小。体系的定性行为就和无旋转有磁场的情形类似，显示正常的磁催化特性。而当耦合变强时，高角动量的朗道能级开始逐渐参与相互作用，在给定的角速度下，作用在这些能级的旋转抑制效应也更为明显。因此进一步增加磁场时手征凝聚不增反减，呈现出类似“反向磁催化”的行为。实际上，这里的“反向磁催化”的图像和温度-磁场平面的著名疑难是相似的。不过要解决温度-磁场平面上的问题，需要切实地理解耦合常数的变化和固定温度不同朗道能级的抑制效应。很显然，第一点是夸克有效模型所不能回答的。

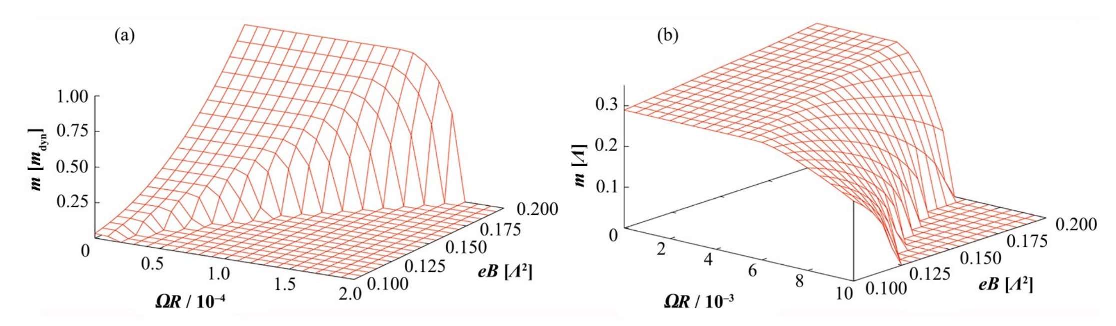


图6 弱耦合(a)和强耦合(b)下手征凝聚随角速度和磁场的变化[34]

Fig.6 The dynamical mass as a function of Ω and eB corresponding to strong coupling (a) and weak coupling (b)[34]

巧妙地利用磁场和旋转的联合作用来促成物理现象的发生在文献[24−25]中体现得尤为明显。在此文中考虑带电的$\pi^{\pm}$系统。由于这是个由标量粒子构成的体系，原则上在旋转背景下不会有明显的物理效应发生。然而考虑到一旦施加一个平行与角速度方向的磁场时，带电的标量介子将会旋转起来，获得一个非零的轨道角动量，而这个角动量是可以被旋转极化的。因此Liu和Zahed详细研究了这个体系中的$\pi^{\pm}$的空间分布，发现π^{+}将倾向于在边缘聚集而π^{-}由于系统整体电荷守恒的关系将聚集在中央区域（图7）。玻色子的宏观聚集将引发玻色-爱因斯坦凝聚现象的发生，与$\pi^{\pm}$相应的BEC即为Pion超流体，即由于磁场和旋转的联合作用，可能在整体同位旋化学势为零的系统内产生Pion不同电荷分量的凝聚分布。

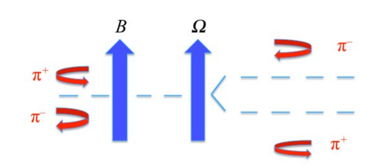


图7 同时处于背景磁场和涡旋场中的能级劈裂示意图[25]
Fig.7 Diagram showing energy-level splitting under the combined influence of external magnetic and vortex fields[25]

2.4 胶子的贡献和格点QCD计算

在磁效应大受关注的时期，格点QCD计算显示，手征过渡的“临界”温度和人们基于通常的磁催化效应的估计结果在趋势上完全相反，即磁场越高反而相变温度越低。这一现象被称为反向磁催化，它是典型的非微扰效应，可以被非微扰技术数值重现，但无法给出直观的物理图像。其原因大致可以理解为，手征配对的夸克之间传递相互作用的胶子虽然不带电荷，但胶子的自能圈有大量的夸克涨落，这些夸克会受到磁场的影响。因此磁效应将通过这种量子场的次级效应影响胶子，进而修正夸克相互作用并改变手征过渡温度的定性行为。在有效模型中，通过引入合理的磁场依赖的四夸克相互作用顶角可以重现反向磁催化现象，因此可以从物理图像上部分验证上述理解的正确性。在背景涡旋情形下，胶子是否也会带来类似的反趋势行为呢？考虑到胶子本身就带有自旋，可以直接被涡旋极化而不必像磁场那样通过次级量子效应获得修正，因此，涡旋在胶子上的极化作用对手征过渡的影响有可能是比较明显的。

要在有效模型中研究旋转依赖的相互作用效应，需要首先得到NJL的耦合常数随角速度的变化行为$G(\Omega)$。在通常的量子场论中，耦合常数的修正需要首先计算场的四点关联函数，再通过截腿等操作得到相互作用顶角的修正。然而，在旋转参考系中，时空平移不变性遭到了破坏，这就导致了不仅四点关联函数会剩下大量不可解析算出的关于贝塞尔函数的积分或求和，而且在进行截腿时还会出现更多的积分。这些计算并没有很好的解析结果，数值计算因为牵涉到很高的积分和求和重数也无法顺利进行。因此需要通过其他途径来获取耦合常数对角速度依赖的定性或半定量关系。Nielsen等[79−81]发展了通过计算规范场在背景色磁场下的能量来抽取耦合常数的一阶量子修正的方法。这一方法不仅可以重现真空中著名的单圈QCD渐近自由结果，而且将他们得到的磁场依赖的耦合常数放入NJL中可以成功给出反向磁催化的结果。这一方案之所以可以工作，是因为一阶量子修正的计算正是通过传递一个规范玻色子来实现的。从量子力学的角度来看，这个过程可以等价为外线粒子在这个中间玻色子构成的势场之中，这个势场所造成的量子修正正是包含在外线粒子的能级分布之中。很显然，对于高阶量子修正过程，这种图像是不正确的。因此它不是像标准的圈图计算那样可以系统地逐级计算量子修正的方法，但对一阶修正而言是一个比较巧妙和直观的方法，最重要的是它规避了对相互作用顶角的直接计算，可以通过对单粒子的能级求和来得到耦合常数的一阶修正。文献[82]中，这一方法被用于了旋转系统。比如以纯胶子系统为例来计算QCD耦合常数随旋转跑动，具体的计算方案为先引入常数的背景色磁场，通过求和旋转胶子系统中所有的本征能级，计算在背景色磁场下的磁化能量：

$$E = -\frac{1}{2}\left[4\pi\chi\right]VB^2 = \sum_{n,i=\{\text{fermions}\}} E_n^i \tag{32}$$

从而给出系统的磁化率$\mu(B) = 1 + 4\pi\chi(B)$随背景色磁场的依赖关系。利用真空磁化率和真空介电常数之间的关系$\mu\epsilon = 1$，并考虑到真空介电常数和耦合常数的联系$\alpha_{\rm eff} = \alpha/\epsilon$就可以得到有效耦合常数随背景色磁场的依赖方式。与普通的磁场作用类似，在QCD中引入T_8分量的色磁场将给出胶子的朗道能级为$E_{nk_3s_3} = (k_3^2 + 2gB(n + 1/2 + s_3))^{1/2}$。这里可以看到，能级的大小由背景色磁场的大小来决定，因此可以将$2gB$等同于相互作用的能量标度而换为标准教程中的k^2。在旋转系统中，利用同样做法求解胶子能级，并通过适当的近似可以得到强相互作用的耦合常数在旋转系统中将随着角速度的增加而减小（图8）。这样就可以在NJL中也引入同样定性行为的耦合常数$G(\Omega)$来重新计算手征相变的临界温度。在局域势近似下，数值结果表明，的确像反向

磁催化一样，在考虑了旋转对耦合常数的影响后，手征相变温度将呈现与常数耦合情形完全相反的趋势。

早在2013年，Yamamoto和Hirono就考察了格点QCD在旋转背景下的费米子作用量部分[33]，他们发现虽然旋转的极化类似费米子化学势的贡献，但其实并不造成符号问题，这一点和同位旋化学势类似。在这项研究中，他们并未真正进行格点模拟，而是仅对格点作用量的形式进行了讨论，因此他们过于乐观估计了这个问题。在最近的格点计算[51]中，Braguta等对QCD的旋转模拟进行了系统的研究。他们发现当考虑旋转修正后，符号问题出现在了胶子场部分：

$$S_G = \frac{1}{2g^2}\int d^4x\,[(1-r^2\Omega^2)F^a_{xy}F^a_{xy} + (1-y^2\Omega^2)F^a_{xz}F^a_{xz} + (1-x^2\Omega^2)F^a_{yz}F^a_{yz} + F^a_{x\tau}F^a_{x\tau} + F^a_{y\tau}F^a_{y\tau} + F^a_{z\tau}F^a_{z\tau} - 2iy\Omega(F^a_{xy}F^a_{y\tau} + F^a_{xz}F^a_{z\tau}) + 2ix\Omega(F^a_{yx}F^a_{x\tau} + F^a_{yz}F^a_{z\tau}) - 2xy\Omega^2F^a_{xz}F^a_{zy}] \tag{33}$$

这是非常令人意外的结果，因为绝大多数情况下符号问题都是由于费米子的化学势项导致的。研究者同时对纯胶子和含有轻夸克的系统进行了计算。为了规避符号问题，研究者引入虚角速度对解禁闭相变进行了模拟。结果发现，在纯胶子系统中相变临界温度会随着虚角速度的增加而减小，而在纯夸克系统中则相反。当同时考虑体系中存在胶子和夸克时，胶子的贡献相比之下更为显著，即系统整体的相变温度是随着虚角速度的增加而减小的。解析延拓至实角速度即表明QCD系统整体的相变温度可能将会是随着实角速度的增加而增加。考虑到在大部分的格点研究中，解禁闭和手征相变的相变温度常常十分接近，这表明很可能上述独立的NJL模型的研究结论和格点研究结果是一致的。当然，由于符号问题的存在，格点结果的可信度也要大打折扣。当考虑旋转对相互作用的修正后，由于胶子场的贡献导致系统的相变温度究竟如何依赖于角速度，现在还是个没有确切答案的问题。

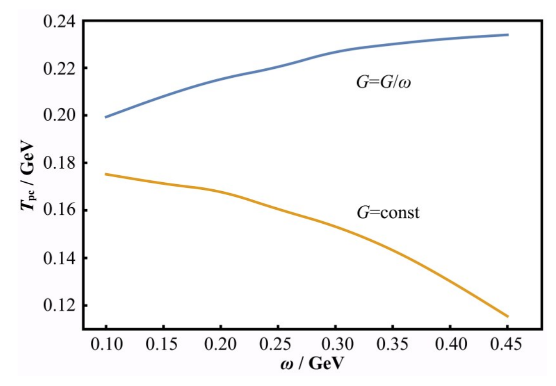


图8 考虑胶子极化的贡献，手征相变温度随角速度的变化[82]

Fig.8 Under the contribution of gluon polarization, the chiral phase transition temperature as a function of the angular velocity[82]

2.5 AdS/QCD和解禁闭相变

夸克模型对研究夸克配对和手征凝聚十分方便，但不易于解禁闭相变的研究。引力对偶模型是比较强有力的研究工具，Chen等[31]采用了The Einstein-Maxwell-Dilaton系统，其模型作用量为：

$$S = \frac{1}{16\pi G_5}\int d^5x\sqrt{-g}\left[R - \frac{h(\phi)}{4}F^2 - \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi)\right] \tag{34}$$

这个时空中的度规写为：

$$ds^2 = \frac{L^2e^{2A_e(z)}}{z^2}\left[-G(z)dt^2 + \frac{1}{G(z)}dz^2 + d\vec{x}^2\right] \tag{35}$$

背景旋转通过相应的坐标变换关系引入 $t \to \frac{1}{\sqrt{1-l^2\omega^2}}(t + l^2\omega\phi), \phi \to \frac{1}{\sqrt{1-l^2\omega^2}}(\phi + \omega t)$。和前面的坐标变换关系比较可以发现，这里就考虑了洛伦兹因子。用此模型对QCD系统的研究发现，角速度的增加将降低解禁闭相变的临界温度，这一点和手征相变在平均场下的研究结果相似，而与格点计算的预期不同。在温度-化学势平面上，研究者发现角速度对解禁闭相变的CEP有明显的影响(图9)。当角速度增加时，CEP将向小化学势和低温的方向移动。

通常的AdS/QCD对应的技术十分适合解禁闭的研究。Braga等[32]利用此技术，选用旋转的柱对称黑洞模型，对零化学势的旋转系统的热力学进行了讨论。在柱坐标下，时空和黑洞分别采用以下度规：

$$ds^2 = \frac{L^2}{z^2}\left(-dt^2 + l^2d\phi^2 + \sum_{i=1}^{2}dx_i^2 + dz^2\right)$$
$$ds^2 = \frac{L^2}{z^2}\left(-f(z)dt^2 + l^2d\phi^2 + \sum_{i=1}^{2}dx_i^2 + \frac{dz^2}{f(z)}\right) \tag{36}$$

在这个研究工作中考虑了两种边界条件，即“硬壁”和“软壁”，它们分别为：

$$\Delta\mathcal{E}(\omega l, T) = \begin{cases} \dfrac{L^3\pi}{\kappa^2\sqrt{1-\omega^2l^2}}\dfrac{1}{2z_h^3}, & z_0 < z_h \\ \dfrac{L^3\pi z_h}{\kappa^2\sqrt{1-\omega^2l^2}}\left(\dfrac{1}{z_0^4} - \dfrac{1}{2z_h^4}\right), & z_0 > z_h \end{cases} \tag{37}$$

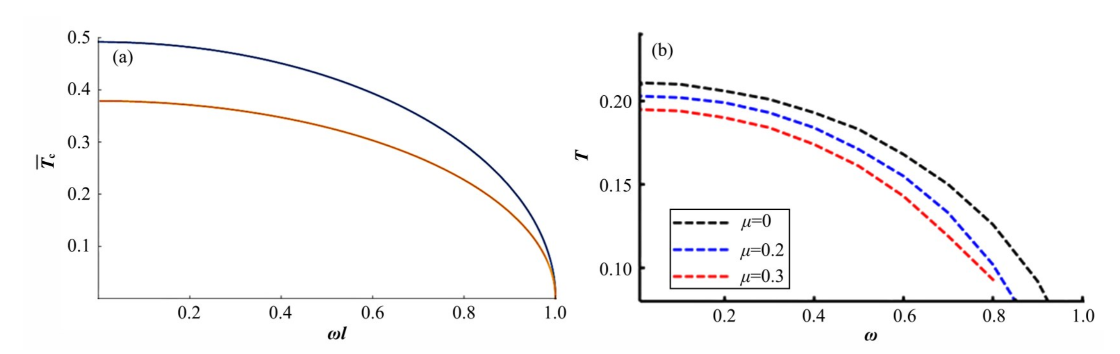


图9 EMD模型 T - ω 平面解禁闭相图[83](a)和AdS/QCD模型两味 T - ω 平面解禁闭相图[31](b)
Fig.9 Phase diagrams of T - ω plane for EMD model[83] (a) and two-flavor AdS/QCD model[31] (b)

$$\Delta\mathcal{E}\left(\omega l,z_h\right)=\frac{\gamma\left(wl\right)L^3\pi}{\kappa^2 z_h^3}\left[-\mathrm{e}^{-cz_h^2}\left(-1+cz_h^2\right)+\frac{1}{2}+c^2z_h^4Ei\left(-cz_h^2\right)\right] \tag{38}$$

研究者发现对于解禁闭相变，临界温度对旋转的依赖是比较敏感的，在角速度仅为20 MeV时，临界温度就会降为无旋情形的0.87。相变对角速度的敏感依赖可能对相对论重离子碰撞的末态观测量带来明显的影响。对于不同边界条件的研究，解禁闭温度随着角速度的增加而减少，这一点和上面的EMD（Einstein-Maxwell-Dilaton）模型的结论以及NJL模型平均场近似下的手征相变的趋势一致。在此文献中研究者也注意到了上面的格点计算结果，但很明显，引力对偶模型的结论是和格点的预期相反的，格点只有费米子部分可以给出旋转抑制的结果，而同时考虑胶子和夸克的作用后，会整体显示旋转对相变温度的催化效果。当然，格点由于符号问题的存在，对其结果也应存疑，要确定在非微扰下究竟是催化还是抑制，需要利用其他的非微扰方法对这个问题进行独立的计算。

3 涡旋场下的输运和实验观测

从模型研究和格点计算可以看到，可以引发手征或解禁闭相变的角速度大小约数十到上百MeV。基于部分子输运的AMPT（A multi-phase transport）、UrQMD（The Ultra-relativistic Quantum Molecular Dynamics）模型和流体力学的模拟计算结果表明[22,55,84–85]，在相对论重离子碰撞中，仅在少数局部的涡旋峰值处有可能在极短的时间内达到这个数量级，整体平均角速度要小得多。因此，希望旋转引起的相变修正能够在当下的重离子碰撞实验中给出显著的可观测效应是不现实的。在涡旋背景下，更为明确的效应是涡旋极化部分子或末态强子，从而影响输运过程。很显然，这一过程最终将影响末态粒子的动量分布。反过来，利用极化测量结果就可以对QGP内部涡旋的大小和分布进行重建。

与磁场的情况相似，相对于重离子碰撞的能量区间，轻夸克可以视作天然的近似手征费米子，动量和自旋方向完全锁定。任何对自旋的极化作用都将直接改变动量的方向，从而改变末态强子的动量分布。在同时具有矢量和轴矢化学势的系统中，涡旋将引发矢量流和轴矢流。这种粒子流和驱动场量的宇称相反的输运规律是十分反常的，因此被归于反常输运现象。这类与手征荷的存在相关的输运现象被称为手征涡旋效应[45–48]：

$$\begin{aligned}\vec{j}_V&=\frac{\mu_V\mu_A}{\pi^2}\vec{\Omega}\\ \vec{j}_A&=\left[\frac{T^2}{6}+\frac{1}{2\pi^2}\left(\mu_V^2+\mu_A^2\right)\right]\vec{\Omega}\end{aligned} \tag{39}$$

同时考虑两种输运的联合效应将产生手征涡旋波。涡旋波将造成正反粒子的椭圆流差异并给出可能的可观测效应。由于带电强子在磁场影响下也会因为反常磁输运效应出现类似的现象，因此，在对涡旋效应的探测时往往以中性的强子的分布作为探针，从而最小化磁场的影响。显然，手征输运现象是对普通输运过程的一阶量子修正。是否可以像量子场论一样，对输运规律的量子修正进行逐阶次的系统计算呢？量子的维格纳函数就是实现此种量子化的优秀途径。文献[56,86]中研究者就在一框架内系统导出了手征涡旋效应：

$$\begin{aligned}\mathcal{J}^{\rho}_{(0)se}(x,p)&=p^{\rho}f_s\delta\left(p^2\right)\\ \mathcal{J}^{\rho}_{(1)s}(x,p)&=-\frac{s}{2}\tilde{\Omega}^{\rho\alpha}p_{\alpha}\frac{\mathrm{d}f_s}{\mathrm{d}\left(\beta\cdot p\right)}\delta\left(p^2\right)-\frac{sQ}{p^2}\tilde{F}^{\rho\lambda}p_{\lambda}f_s\delta\left(p^2\right)\end{aligned} \tag{40}$$

在相对论重离子碰撞实验中业已观测到显著的中性超子极化[16–17,87–90]，正反超子的极化率随着碰撞中心度而增加，随着碰撞能量的增加而减小。这一结果与利用AMPT模型对QGP局域涡旋的模拟结果定性一致。因此，它被认为是QGP具有强烈的整体非零涡旋的证据。整体极化数据可以用不同的模

型得到解释。Ayala等[60−61,65]用core-corona模型对计算Λ及其反粒子的全局极化。这是个统计模型，其主要思想是考虑Λ的来源核心分别为火球高密度的“core”和低密度的“corona”。研究表明，极化函数的整体性质与来自core和来自corona的Λ相对丰度相关。对于低能量碰撞，前者更丰富；对于较高能量，后者变得更丰富。这个相对丰度竞争的主要后果是在碰撞能量约10 GeV处同时达到极化峰值。因此预测，Λ的全局极化应该在NICA和HADES的能量范围内达到峰值。更为细致的研究是利用部分子输运模型AMPT来模拟部分子在背景涡旋场中的极化并给出末态超子分布[67,91−93]，此工作中也对局域极化的分布和对碰撞条件的依赖给出了详细的结果。Li等[53]对非对心重离子碰撞事例，考虑自旋-涡旋和自旋-磁场耦合，并提取强耦合QGP流体涡旋和磁场作为输入，用AMPT计算了Λ及其反粒子的全局极化。可以看到，全局极化的计算结果和STAR的测量数据比较吻合(图10)。考虑不同的流体输入和微观极化细节的模拟计算表明对于全局极化的结果是比较容易重现的[57,64,94−102]。更丰富的实验测量数据表明，超子和其反粒子的极化并不完全相同，由于它是个复合粒子，因此不可避免地受到电磁作用的影响。Guo等[58]仔细研究了同时存在背景磁场和涡旋时的全局极化。研究表明，用火球中的磁场来解释数据是可行的，正反超子间极化的差别比较敏感的依赖于磁场的寿命。

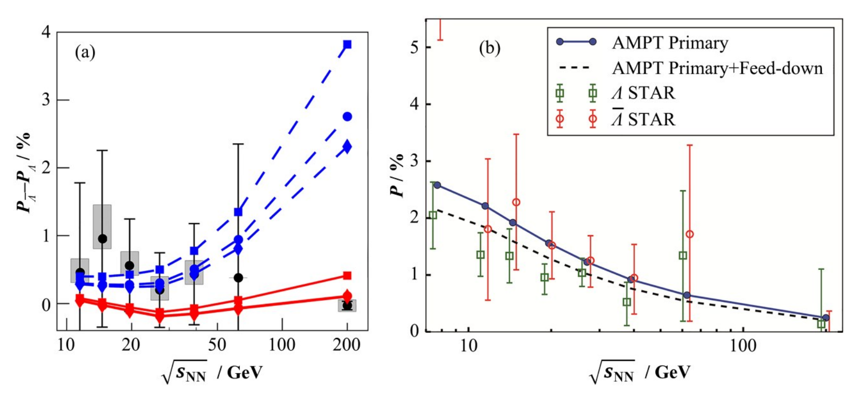


图10 不同磁场寿命下Λ及其反粒子的全局极化差异随对撞能量的变化[58](a)和AMPT模型对全局极化的模拟与STAR实验的对比[53](b)

Fig.10 Global polarization difference between Λ and its antiparticle under different magnetic field lifetimes as a function of collision energy[58] (a), comparison between the AMPT model simulation and the STAR experiment of global polarization[53] (b)

在进一步对涡旋的空间分布进行研究时，人们发现了理论和实验的差异。如同对涡旋均值的测量一样，对涡旋空间分布的测量归结于对中性矢量粒子的动量角分布的测量。Wei等[59]总结并系统研究了不同碰撞能量下Au+Au碰撞中的局域极化分布(图11)。文章对现阶段的实验和理论的差异进行了总结，即在中心快度区，纵向自旋极化的方位角分布的理论结果同最近的实验数据趋势完全相反；矢量介子φ和K^{*0}的极化测量，也与理论预测矛盾。这是十分异常的结果。因为整体极化的数据可以用各类模型拟合和预测得很理想，这就表明现有的唯象模型至少是部分正确把握了涡旋相关的物理过程的。局域极化的截然相反的结果可能来源于理论和实验对应过程中的定义偏差。

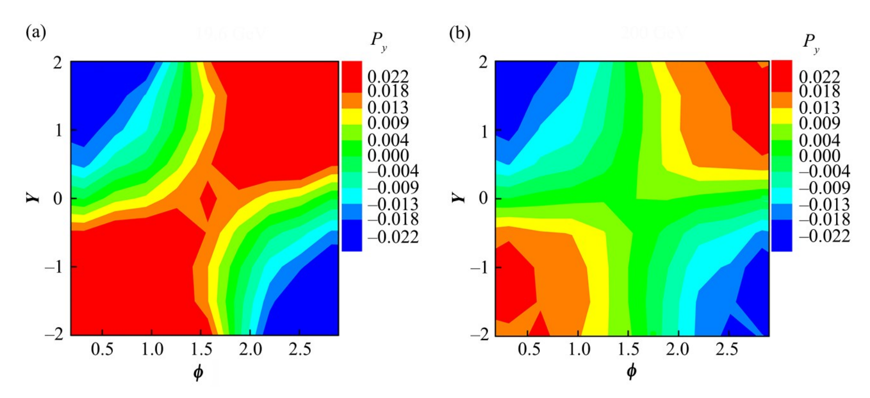


图11 对撞能量为19.6 GeV (a)和200 GeV (b)中心度为20%~50%金-金碰撞下Λ局域极化的快度-方位角分布[59]

Fig.11 Rapidity-azimuth distribution of the local spin polarization of Λ and $\bar\Lambda$ for Au+Au collisions at 20%~50% centrality range at 19.6 GeV and 200 GeV, respectively[59]

基于流体力学语言，Becattini等[100]研究了满足各类不同变换性质的涡旋定义。上面提到，对于旋转系统的理论处理在相对论的变换性质方面存在一定的含混之处。作为局域平衡的热力学体系，QGP在每个流元中的相对论协变性已经破坏。因此在与实验进行比对时，如何正确地理解和刻画实验当中的涡旋是一个值得思考的问题。在上述文献中，研究者就对三种涡旋定义进行了对比研究，其中包括普通涡旋，热涡旋和*T*-涡旋（图12）。

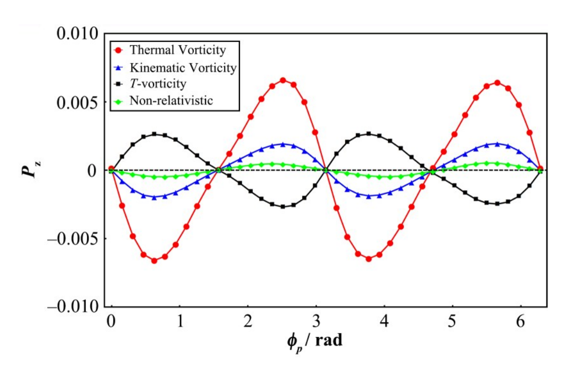


图12 使用不同涡旋定义计算所得的局域极化随方位角的分布[83]

Fig.12 Local polarizations as functions of azimuthal angles for different definitions of vorticity[83]

$$\omega_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\partial_\nu u_\mu - \partial_\mu u_\nu\right) \tag{41}$$

$$\Omega_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left[\partial_\nu\left(u_\mu/T\right) - \partial_\mu\left(u_\nu/T\right)\right] \tag{42}$$

$$\Omega_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left[\partial_\nu\left(Tu_\mu\right) - \partial_\mu\left(Tu_\nu\right)\right] \tag{43}$$

很显然，热涡旋和温度涡旋对温度的依赖方式是完全相反的，而普通的涡旋则完全不依赖温度。如果考虑到QGP本身特有的温度分布，这三者的空间分布将有很大的差别。因此，正确地理解和使用相应的涡旋定义可能蕴含着解决局域极化困难的线索。

当然，局域极化的困难也可能就是现有的唯象模型普遍遗漏某类物理机制造成的。总之，这一矛盾引起了广泛的兴趣，从部分子输运模型到流体模型，人们开展了大量的模拟工作，试图理解这一明显相反的趋势[52]。例如Wei等[59,68]使用MUSIC黏滞流体模型与AMPT结合研究超子自旋极化，模型使用UrQMD强子级联QGP火球演化，这种混合模型可以很好地描述各种RHIC-BES能量下的软强子，如所有带电强子的快度分布、横向动量谱和椭圆流等，但得到的局域极化还是和实验趋势完全相反。Sun等[69]也用类似的模型进行了超子极化对冷却(Freeze-out)温度的依赖的研究。Li等[103−104]通过计算强、电磁和弱过程的两体衰变过程，考虑了奇异重子对Λ超子自旋极化的下馈效应，系统计算了包括Λ、Ξ^-、Ω^-在内的超子全局和局域极化。这种贡献削弱了原始的Λ极化，但不足以在定性上翻转当前理论上关于Λ局域极化方位角的预言。因此实验截然相反的局域极化趋势还是没有得到解释。Wu等[83,105]通过将普通的涡旋代替为温度涡旋（*T*-vorticity）暂时解决了矛盾。当采用温度涡旋作为背景的涡旋场时，温度的分布引入了新的贡献，理论可以得到与实验测量相似的趋势。

最近，Fu等[105−106]的理论进展表明，局域极化可能包括来自于涡旋之外的、由流体热剪切张量所带来的效应。当这一新贡献被包括到唯象模拟后，实验结果可得到较好描述。Becattini等[105−106]考虑了强子的冷却逸出温度对强子极化的影响，发现等温冷却的假设将带来新的自旋极化贡献从而进一步修正局域极化的理论与实验的差异。

除中性超子外，Wei等[107]提出利用双轻子极化的差异来探测涡旋的方案。文章显示旋转对双轻子的谱函数有增强作用，且对低不变质量的双轻子作用更为显著。通过研究易于测量的双轻子产额和椭圆流对旋转的依赖，文章提供了用双轻子相关的信号对涡旋进行探测的可能性。在唯象学方面，人们进一步讨论了很多包括轻子谱函数、产额和椭圆流以及束缚态解离对旋转的依赖[50,108−109]。在真实的QGP中极化不是瞬间发生的，需要消耗一定的弛豫时间，而QGP的形成和消亡也十分迅速，这两个时间的竞争也会影响超子极化的观测结果[62−63]。当考虑超子的局域产生过程后仍可以比较好地符合实验的整体极化结果，这表明整体极化的强度与体系的平均涡旋和强子产额关系较为显著。

4 结语

从上面的介绍可以看到，对于QCD多体系统，旋转将产生多个层次的影响，其定量效果与旋转角速度的大小直接对应。因为旋转并不是像磁场一样与物质场存在直接的相互作用，它在单体上的作用是比较明确的，即对施以角动量极化作用，单体的能量发生移动，被极化能量修正。因此，在涡旋仅有数个MeV时，只有质量最为接近这个数值的轻夸克受到显著的影响。作为近似的手征费米子，旋转极化将明显修正轻夸克的自旋方向，并通过手征费米子的自旋-动量锁定性质影响其动量方向进而改变输运过程。这一与手征费米子密切相关的机制无法在手征平衡的系统驱动粒子流，却可以在正反物质不对称的系统中驱动手征流。通过宇称分析，可以得知依赖于手征费米子存在的反常输运现象可能会出现在任何具有背景赝矢量场的系统中。这些手征输

运导致的末态粒子动量分布的变化很有可能在QGP的演化中存在，但要明确地探测到它们还需要实验上更为精巧的测量和理论上更为敏感的信号。随着系统温度进一步降低，手征对称性发生破缺，系统中不再存在近似的手征费米子，夸克的质量约为组分质量300 MeV。在这样的系统中，过小的极化能量将对系统性质不再具有可观测效应。只有当旋转角速度增加到几十到数百MeV时，手征和解禁闭相变的相变温度才会受到明显修正。有效模型的平均场近似和引力对偶模型的研究显示，手征和解禁闭相变在旋转系统中将更容易发生。然而，QCD系统中还存在着大量的胶子，它们不仅质量很小，而且具有很强的自相互作用。当考虑旋转对胶子的影响后，有效模型和格点计算的结果都暗示，虽然手征凝聚被旋转抑制，但相变温度可能被反向抬高，形成旋转催化对称性破坏的态势。由于格点计算出人意料地出现了符号问题，这些结果尚不能被完全肯定。在重子和同位旋化学势不为零的区域，有效模型的计算显示旋转将同样抑制色超导和Pion超流配对基态的产生。随着旋转角速度进一步地增加，系统将倾向于矢量玻色子的宏观凝聚态。由于光速极限的限制，如此大的旋转角速度是很难在较大的范围内存在的。边界条件或系统非均匀性是在更为现实的计算中必须考虑的问题。同样是有效模型的计算发现，边界条件在零温附近会大幅削弱旋转的影响，但在有限温度时，旋转的贡献和考虑自然边界条件时差别并不显著。由于旋转的离心效应，夸克配对的凝聚将出现空间上的非均匀性。类似BdG方程的自洽求解方法给出了手征凝聚随径向的分布。这些结果不仅肯定了旋转均值本身所导致的手征抑制效应，也揭示了旋转沿径向的变化反而增强该局域的凝聚。各类唯象模型模拟显示，相对论重离子碰撞所生成的QGP火球中，涡旋的平均值虽然仅到引发手征输运的量级，但可能会因为涨落在局部达到很大的数值。落差极大的非均匀涡旋场是否会因为相变温度的修正而影响QGP的演化，这是一个很有意义但也需要在确定涡旋场分布的前提下才有可能探究的问题。人们尝试利用超子整体和局域极化的实验结果来帮助确定来涡旋场的空间分布。局域极化方面实验和理论的差异促进了更细致理论的研究，人们逐渐对QGP的量子输运过程、流体黏滞效应和后续的强子产生过程有了更进一步的认识。总而言之，QGP涡旋的发现不仅带来了大量新奇有趣的物理效应，而且引发了人们对这种特殊系统的量子化和时空特性等本质问题的思考，相信在这个方向的深入探索将揭示更多QCD相变、相对论重离子对撞的奥秘并促使对理论物理更一般问题的讨论。

作者贡献声明 姜寅负责资料收集、初稿写作和后期修改工作；廖劲峰负责文章审阅修订工作。两位作者共同参与了文章构思工作。

参考文献

1 Alford M G, Schmitt A, Rajagopal K, *et al*. Color superconductivity in dense quark matter[J]. Reviews of Modern Physics, 2008, **80**(4): 1455 – 1515. DOI: 10.1103/revmodphys.80.1455.

2 Fukushima K, Hatsuda T. The phase diagram of dense QCD[J]. Reports on Progress in Physics, 2011, **74**(1): 014001. DOI: 10.1088/0034-4885/74/1/014001.

3 Bzdak A, Esumi S, Koch V, *et al*. Mapping the phases of quantum chromodynamics with beam energy scan[J]. Physics Reports, 2020, **853**: 1 – 87. DOI: 10.1016/j.physrep.2020.01.005.

4 Ma Y G. New type of double-slit interference experiment at Fermi scale[J]. Nuclear Science and Techniques, 2023, **34**(1): 16. DOI: 10.1007/s41365-023-01167-6.

5 Wang X N. Vector meson spin alignment by the strong force field[J]. Nuclear Science and Techniques, 2023, **34**(1): 15. DOI: 10.1007/s41365-023-01166-7.

6 Chen H L, Huang X G, Liao J F. QCD phase structure under rotation[M]//Strongly Interacting Matter under Rotation. Cham: Springer International Publishing, 2021: 349 – 379. DOI: 10.1007/978-3-030-71427-7_11.

7 Gusynin V P, Miransky V A, Shovkovy I A. Catalysis of dynamical flavor symmetry breaking by a magnetic field in 2+1 dimensions[J]. Physical Review Letters, 1994, **73**(26): 3499 – 3502. DOI: 10.1103/PhysRevLett.73.3499.

8 Gusynin V P, Miransky V A, Shovkovy I A. Dimensional reduction and catalysis of dynamical symmetry breaking by a magnetic field[J]. Nuclear Physics B, 1996, **462**(2 – 3): 249 – 290. DOI: 10.1016/0550-3213(96)00021-1.

9 Bali G S, Bruckmann F, Endrődi G, *et al*. The QCD phase diagram for external magnetic fields[J]. Journal of High Energy Physics, 2012, **2012**(2): 44. DOI: 10.1007/JHEP02(2012)044.

10 Bali G S, Bruckmann F, Endrődi G, *et al*. QCD quark condensate in external magnetic fields[J]. Physical Review D, 2012, **86**(7): 071502. DOI: 10.1103/physrevd.86.071502.

11 Andersen J O, Naylor W R, Tranberg A. Phase diagram of QCD in a magnetic field: a review[EB/OL]. 2014: arXiv:

1411.7176. https://arxiv.org/abs/1411.7176.

12 Miransky V A, Shovkovy I A. Quantum field theory in a magnetic field: from quantum chromodynamics to graphene and Dirac semimetals[J]. Physics Reports, 2015, **576**: 1 – 209. DOI: 10.1016/j.physrep.2015.02.003.

13 Huang X G. Electromagnetic fields and anomalous transports in heavy-ion collisions-a pedagogical review [J]. Reports on Progress in Physics Physical Society (Great Britain), 2016, **79**(7): 076302. DOI: 10.1088/0034-4885/79/7/076302.

14 Kharzeev D E, Liao J, Voloshin S A, *et al*. Chiral magnetic and vortical effects in high-energy nuclear collisions—a status report[J]. Progress in Particle and Nuclear Physics, 2016, **88**: 1 – 28. DOI: 10.1016/j.ppnp.2016.01.001.

15 Hattori K, Huang X G. Novel quantum phenomena induced by strong magnetic fields in heavy-ion collisions [J]. Nuclear Science and Techniques, 2017, **28**(2): 26. DOI: 10.1007/s41365-016-0178-3.

16 STAR Collaboration. Global Λ hyperon polarization in nuclear collisions[J]. Nature, 2017, **548**(7665): 62 – 65. DOI: 10.1038/nature23004.

17 Adam J, Adamczyk L, Adams J R, *et al*. Global polarization of Λ hyperons in Au+Au collisions at $\sqrt{s_{\mathrm{NN}}}$=200 GeV[J]. Physical Review C, 2018, **98**(1): 014910. DOI: 10.1103/PhysRevC.98.014910.

18 STAR Collaboration, Adam J, Adamczyk L, *et al*. Polarization of Λ ($\bar{\Lambda}$) hyperons along the beam direction in Au+Au collisions at $\sqrt{s_{\mathrm{NN}}}$=200 GeV[J]. Physical Review Letters, 2019, **123**(13): 132301. DOI: 10.1103/PhysRevLett.123.132301.

19 Deng W T, Huang X G. Vorticity in heavy-ion collisions [J]. Physical Review C, 2016, **93**(6): 064907. DOI: 10.1103/physrevc.93.064907.

20 Jiang Y, Lin Z W, Liao J F. Rotating quark-gluon plasma in relativistic heavy-ion collisions[J]. Physical Review C, 2016, **94**(4): 044910. DOI: 10.1103/physrevc.94.044910.

21 Shi S, Li K, Liao J. Searching for the subatomic swirls in the CuCu and CuAu collisions[EB/OL]. 2017: arXiv: 1712.00878. https://arxiv.org/abs/1712.00878.

22 Deng X G, Huang X G, Ma Y G, *et al*. Vorticity in low-energy heavy-ion collisions[J]. Physical Review C, 2020, **101**(6): 064908. DOI: 10.1103/physrevc.101.064908.

23 Chernodub M N, Gongyo S. Effects of rotation and boundaries on chiral symmetry breaking of relativistic fermions[J]. Physical Review D, 2017, **95**(9): 096006. DOI: 10.1103/physrevd.95.096006.

24 Liu Y Z, Zahed I. Rotating Dirac fermions in a magnetic field in 1+2 and 1+3 dimensions[J]. Physical Review D, 2018, **98**: 014017. DOI: 10.1103/physrevd.98.014017.

25 Liu Y Z, Zahed I. Pion condensation by rotation in a magnetic field[J]. Physical Review Letters, 2018, **120**(3): 032001. DOI: 10.1103/PhysRevLett.120.032001.

26 Chernodub M N, Gongyo S. Interacting fermions in rotation: chiral symmetry restoration, moment of inertia and thermodynamics[J]. Journal of High Energy Physics, 2017, **2017**(1): 136. DOI: 10.1007/JHEP01(2017)136.

27 Wang L X, Jiang Y, He L Y, *et al*. Local suppression and enhancement of the pairing condensate under rotation[J]. Physical Review C, 2019, **100**(3): 034902. DOI: 10.1103/physrevc.100.034902.

28 Zhang H, Hou D F, Liao J F. Mesonic condensation in isospin matter under rotation[J]. Chinese Physics C, 2020, **44**(11): 111001. DOI: 10.1088/1674-1137/abae4d.

29 Sun F, Huang A P. Properties of strange quark matter under strong rotation[J]. Physical Review D, 2022, **106**(7): 076007. DOI: 10.1103/physrevd.106.076007.

30 Wang X Y, Wei M H, Li Z B, *et al*. Quark matter under rotation in the NJL model with vector interaction[J]. Physical Review D, 2019, **99**(1): 016018. DOI: 10.1103/physrevd.99.016018.

31 Chen X, Zhang L, Li D N, *et al*. Gluodynamics and deconfinement phase transition under rotation from holography[J]. Journal of High Energy Physics, 2021, **2021**(7): 132. DOI: 10.1007/JHEP07(2021)132.

32 Braga N R F, Faulhaber L F, Junqueira O C. Confinement-deconfinement temperature for a rotating quark-gluon plasma[J]. Physical Review D, 2022, **105**(10): 106003. DOI: 10.1103/physrevd.105.106003.

33 Yamamoto A, Hirono Y. Lattice QCD in rotating frames [J]. Physical Review Letters, 2013, **111**(8): 081601. DOI: 10.1103/PhysRevLett.111.081601.

34 Chen H L, Fukushima K, Huang X G, *et al*. Analogy between rotation and density for Dirac fermions in a magnetic field[J]. Physical Review D, 2016, **93**(10): 104052. DOI: 10.1103/physrevd.93.104052.

35 Jiang Y, Liao J F. Pairing phase transitions of matter under rotation[J]. Physical Review Letters, 2016, **117**(19): 192302. DOI: 10.1103/PhysRevLett.117.192302.

36 Ebihara S, Fukushima K, Mameda K. Boundary effects and gapped dispersion in rotating Fermionic matter[J].

Physics Letters B, 2017, **764**: 94 – 99. DOI: 10.1016/j.physletb.2016.11.010.

37 Huang X G, Nishimura K, Yamamoto N. Anomalous effects of dense matter under rotation[J]. Journal of High Energy Physics, 2018, **2018**(2): 69. DOI: 10.1007/JHEP02(2018)069.

38 Chernodub M N, Gongyo S. Edge states and thermodynamics of rotating relativistic fermions under magnetic field[J]. Physical Review D, 2017, **96**(9): 096014. DOI: 10.1103/physrevd.96.096014.

39 Wang L X, Jiang Y, He L Y, *et al*. Chiral vortices and pseudoscalar condensation due to rotation[J]. Physical Review D, 2019, **100**(11): 114009. DOI: 10.1103/physrevd.100.114009.

40 Chen H L, Huang X G, Mameda K. Do charged pions condense in a magnetic field with rotation? [EB/OL]. 2019: arXiv: 1910.02700. https://arxiv. org/abs/1910.02700.

41 Cao G Q, He L Y. Rotation induced charged pion condensation in a strong magnetic field: a Nambu-Jona-Lasino model study[J]. Physical Review D, 2019, **100**(9): 094015. DOI: 10.1103/physrevd.100.094015.

42 Zhang Z, Shi C, Luo X F, *et al*. Chiral phase transition in a rotating sphere[J]. Physical Review D, 2020, **101**(7): 074036. DOI: 10.1103/physrevd.101.074036.

43 Zhang Z, Shi C, Luo X F, *et al*. Rotating fermions inside a spherical boundary[J]. Physical Review D, 2020, **102**(6): 065002. DOI: 10.1103/physrevd.102.065002.

44 Cao G Q. Charged rho superconductor in the presence of magnetic field and rotation[J]. The European Physical Journal C, 2021, **81**(2): 148. DOI: 10.1140/epjc/s10052-021-08900-8.

45 Vilenkin A. Macroscopic parity-violating effects: neutrino fluxes from rotating black holes and in rotating thermal radiation[J]. Physical Review D, 1979, **20**(8): 1807 – 1812. DOI: 10.1103/physrevd.20.1807.

46 Erdmenger J, Haack M, Kaminski M, *et al*. Fluid dynamics of R-charged black holes[J]. Journal of High Energy Physics, 2009, **2009**(1): 55. DOI: 10.1088/1126-6708/2009/01/055.

47 Banerjee N, Bhattacharya J, Bhattacharyya S, *et al*. Hydrodynamics from charged black branes[J]. Journal of High Energy Physics, 2011, **2011**(1): 94. DOI: 10.1007/JHEP01(2011)094.

48 Son D T, Surówka P. Hydrodynamics with triangle anomalies[J]. Physical Review Letters, 2009, **103**(19): 191601. DOI: 10.1103/PhysRevLett.103.191601.

49 Yang Y G, Fang R H, Wang Q, *et al*. Quark coalescence model for polarized vector mesons and baryons[J]. Physical Review C, 2018, **97**(3): 034917. DOI: 10.1103/physrevc.97.034917.

50 Tuchin K. Spin contribution to the dissociation of bound states in rotating medium in magnetic field[J]. Nuclear Physics A, 2021, **1016**: 122338. DOI: 10.1016/j.nuclphysa.2021.122338.

51 Roenko A, Braguta V, Kotov A Y, *et al*. Lattice study of the confinement/deconfinement transition in rotating gluodynamics[C]//Proceedings of the 38th International Symposium on Lattice Field Theory — PoS (LATTICE2021). Zoom/Gather@Massachusetts Institute of Technology. Trieste, Italy: Sissa Medialab, 2022: 125. DOI: 10.22323/1.396.0125.

52 Li H, Petersen H, Pang L G, *et al*. Local and global Λ polarization in a vortical fluid[J]. Nuclear Physics A, 2017, **967**: 772 – 775. DOI: 10.1016/j. nuclphysa. 2017.04.008.

53 Li H, Pang L G, Wang Q, *et al*. Global Λ polarization in heavy-ion collisions from a transport model[J]. Physical Review C, 2017, **96**(5): 054908. DOI: 10.1103/physrevc.96.054908.

54 Zubkov M A. Hall effect in the presence of rotation[J]. EPL (Europhysics Letters), 2018, **121**(4): 47001. DOI: 10.1209/0295-5075/121/47001.

55 Jiang Y, Lin Z W, Huang X G, *et al*. Strongly interacting matter under rotation[J]. EPJ Web of Conferences, 2018, **171**: 07004. DOI: 10.1051/epjconf/201817107004.

56 Gao J H, Pang J Y, Wang Q. Chiral vortical effect in Wigner function approach[J]. Physical Review D, 2019, **100**(1): 016008. DOI: 10.1103/physrevd.100.016008.

57 Saha A, Sanyal S. Vorticity with varying collision energy in relativistic heavy ion collisions[C]//Proceedings of the DAE-BRNS Symposium on Nuclear Physics. 2019: 728 – 729.

58 Guo Y, Shi S Z, Feng S Q, *et al*. Magnetic field induced polarization difference between hyperons and anti-hyperons[J]. Physics Letters B, 2019, **798**: 134929. DOI: 10.1016/j.physletb.2019.134929.

59 Wei D X, Deng W T, Huang X G. Thermal vorticity and spin polarization in heavy-ion collisions[J]. Physical Review C, 2019, **99**(1): 014905. DOI: 10.1103/physrevc.99.014905.

60 Ayala A, Alberto Ayala Torres M, Cuautle E, *et al*. Core meets corona: a two-component source to explain Λ and $\bar{\Lambda}$ global polarization in semi-central heavy-ion collisions [J]. Physics Letters B, 2020, **810**: 135818. DOI: 10.1016/j.physletb.2020.135818.

61 Ayala A, Cuautle E, Domínguez I, *et al*. Two-component source to explain Λ and $\bar{\Lambda}$ global polarization in non-central heavy-ion collisions[J]. Journal of Physics: Conference Series, 2020, **1602**(1): 012032. DOI: 10.1088/1742-6596/1602/1/012032.

62 Ayala A, de la Cruz D, Hernández L A, *et al*. Relaxation time for the alignment between the spin of a finite-mass quark or antiquark and the thermal vorticity in relativistic heavy-ion collisions[J]. Physical Review D, 2020, **102**(5): 056019. DOI: 10.1103/physrevd.102.056019.

63 Ayala A, de la Cruz D, Hernández-Ortíz S, *et al*. Relaxation time for quark spin and thermal vorticity alignment in heavy-ion collisions[J]. Physics Letters B, 2020, **801**: 135169. DOI: 10.1016/j.physletb.2019.135169.

64 Saha A, Sanyal S. Flow and vorticity with varying chemical potential in relativistic heavy ion collisions[J]. International Journal of Modern Physics E, 2020, **29**(1): 2050001. DOI: 10.1142/s0218301320500019.

65 Ayala A, Domínguez I, Maldonado I, *et al*. Rise and fall of Λ and $\bar{\Lambda}$ global polarization in semi-central heavy-ion collisions at HADES, NICA and RHIC energies from the core-corona model[J]. Physical Review C, 2022, **105**(3): 034907. DOI: 10.1103/physrevc.105.034907.

66 Fujimoto Y, Fukushima K, Hidaka Y. Deconfining phase boundary of rapidly rotating hot and dense matter and analysis of moment of inertia[J]. Physics Letters B, 2021, **816**: 136184. DOI: 10.1016/j.physletb.2021.136184.

67 Guo Y, Liao J F, Wang E K, *et al*. Hyperon polarization from the vortical fluid in low-energy nuclear collisions[J]. Physical Review C, 2021, **104**(4): L041902. DOI: 10.1103/physrevc.104.l041902.

68 Fu B, Xu K, Huang X G, *et al*. Hydrodynamic study of hyperon spin polarization in relativistic heavy ion collisions[J]. Physical Review C, 2021, **103**(2): 024903. DOI: 10.1103/PhysRevC.103.024903.

69 Sun Y F, Zhang Z, Ko C M, *et al*. Evolution of Λ polarization in the hadronic phase of heavy-ion collisions [J]. Physical Review C, 2022, **105**(3): 034911. DOI: 10.1103/physrevc.105.034911.

70 Liang Z T, Wang X N. Globally polarized quark-gluon plasma in noncentral A+A collisions[J]. Physical Review Letters, 2005, **94**(10): 102301. DOI: 10.1103/physrevlett.94.102301.

71 Liang Z T, Wang X N. Spin alignment of vector mesons in non-central A+A collisions[J]. Physics Letters B, 2005, **629**(1): 20 – 26. DOI: 10.1016/j.physletb.2005.09.060.

72 Liu Y C, Huang X G. Anomalous chiral transports and spin polarization in heavy-ion collisions[J]. Nuclear Science and Techniques, 2020, **31**(6): 56. DOI: 10.1007/s41365-020-00764-z.

73 Becattini F, Lisa M A. Polarization and vorticity in the quark-gluon plasma[J]. Annual Review of Nuclear and Particle Science, 2020, **70**(1): 395 – 423. DOI: 10.1146/annurev-nucl-021920-095245.

74 Huang X G, Liao J F, Wang Q, *et al*. Vorticity and spin polarization in heavy ion collisions: transport models[M]//Strongly Interacting Matter under Rotation. Cham: Springer International Publishing, 2021: 281 – 308. DOI: 10.1007/978-3-030-71427-7_9.

75 Gao J H, Liang Z T, Wang Q, *et al*. Global polarization effect and spin-orbit coupling in strong interaction[M]//Strongly Interacting Matter under Rotation. Cham: Springer International Publishing, 2021: 195 – 246. DOI: 10.1007/978-3-030-71427-7_7.

76 Becattini F. Polarization in relativistic fluids: a quantum field theoretical derivation[M]//Strongly Interacting Matter under Rotation. Cham: Springer International Publishing, 2021: 15 – 52. DOI: 10.1007/978-3-030-71427-7_2.

77 Vilenkin A. Quantum field theory at finite temperature in a rotating system[J]. Physical Review D, 1980, **21**(8): 2260 – 2269. DOI: 10.1103/physrevd.21.2260.

78 Xu T, Jiang Y. Proca equation and vector field quantization in a rotating system[J]. Chinese Physics C, 2021, **45**(11): 114102. DOI: 10.1088/1674-1137/ac1d9c.

79 Nielsen N K. Asymptotic freedom as a spin effect[J]. American Journal of Physics, 1981, **49**(12): 1171 – 1178. DOI: 10.1119/1.12565.

80 Schneider R A. Debye screening at finite temperature reexamined[J]. Physical Review D, 2002, **66**(3): 036003. DOI: 10.1103/physrevd.66.036003.

81 Schneider R A. Note on asymptotic freedom at high temperatures[J]. Physical Review D, 2003, **67**(5): 057901. DOI: 10.1103/physrevd.67.057901.

82 Jiang Y. Chiral vortical catalysis[J]. The European Physical Journal C, 2022, **82**(10): 949. DOI: 10.1140/epjc/s10052-022-10915-8.

83 Wu H Z, Pang L G, Huang X G, *et al*. Local spin polarization in high energy heavy ion collisions[J]. Physical Review Research, 2019, **1**(3): 033058. DOI: 10.1103/physrevresearch.1.033058.

84 Xie Y L, Bleicher M, Stöcker H, *et al*. Λ polarization in peripheral collisions at moderately relativistic energies[J]. Physical Review C, 2016, **94**(5): 054907. DOI: 10.1103/physrevc.94.054907.

85 Lei A K, Wang D J, Zhou D M, *et al*. Vorticity and Λ

polarization in the microscopic transport model PACIAE [J]. Physical Review C, 2021, **104**(5): 054903. DOI: 10.1103/physrevc.104.054903.

86 Sheng X L, Weickgenannt N, Speranza E, *et al*. From Kadanoff-Baym to Boltzmann equations for massive spin-1/2 fermions[J]. Physical Review D, 2021, **104**(1): 016029. DOI: 10.1103/physrevd.104.016029.

87 Siddique I, Liang Z T, Lisa M A, *et al*. Alternative methods for measurement of the global polarization of Λ hyperons[J]. Chinese Physics C, 2019, **43**(1): 014103. DOI: 10.1088/1674-1137/43/1/014103.

88 Niida T. Global and local polarization of Λ hyperons in Au+Au collisions at 200 GeV from STAR[J]. Nuclear Physics A, 2019, **982**: 511 – 514. DOI: 10.1016/j.nuclphysa.2018.08.034.

89 Adam J, Adamczyk L, Adams J R, *et al*. Global polarization of Ξ and Ω hyperons in Au+Au collisions at $\sqrt{s_{NN}}$=200 GeV[J]. Physical Review Letters, 2021, **126**(16): 162301. DOI:10.1103/PhysRevLett.126.162301.

90 Abdallah M S, Aboona B E, Adam J, *et al*. Global Lambda-hyperon polarization in Au plus Au collisions at $\sqrt{s_{NN}}$=3 GeV[J]. Physical Review C, 2021, **104**(6): L061901. DOI:10.1103/PhysRevC.104.L061901.

91 Sun Y F, Ko C M. Chiral vortical and magnetic effects in the anomalous transport model[J]. Physical Review C, 2017, **95**(3): 034909. DOI: 10.1103/physrevc.95.034909.

92 Sun Y F, Ko C M. Λ hyperon polarization in relativistic heavy ion collisions from a chiral kinetic approach[J]. Physical Review C, 2017, **96**(2): 024906. DOI: 10.1103/physrevc.96.024906.

93 Sun Y F, Ko C M. Azimuthal angle dependence of the longitudinal spin polarization in relativistic heavy ion collisions[J]. Physical Review C, 2019, **99**(1): 011903. DOI: 10.1103/physrevc.99.011903.

94 Xie Y L, Wang D J, Csernai L P. Global Λ polarization in high energy collisions[J]. Physical Review C, 2017, **95**(3): 031901. DOI: 10.1103/physrevc.95.031901.

95 Ivanov Y B, Soldatov A A. Vorticity in heavy-ion collisions at the JINR nuclotron-based ion collider facility [J]. Physical Review C, 2017, **95**(5): 054915. DOI: 10.1103/physrevc.95.054915.

96 Ivanov Y B, Toneev V D, Soldatov A A. Estimates of hyperon polarization in heavy-ion collisions at collision energies $\sqrt{s_{NN}}$=4 – 40 GeV[J]. Physical Review C, 2019, **100**(1): 014908. DOI: 10.1103/physrevc.100.014908.

97 Ivanov Y B, Soldatov A A. Correlation between global polarization, angular momentum, and flow in heavy-ion collisions[J]. Physical Review C, 2020, **102**(2): 024916. DOI: 10.1103/physrevc.102.024916.

98 Huang X G. Vorticity and spin polarization—a theoretical perspective[J]. Nuclear Physics A, 2021, **1005**: 121752. DOI: 10.1016/j.nuclphysa.2020.121752.

99 Xie Y L, Chen G, Csernai L P. A study of Λ and $\bar{\Lambda}$ polarization splitting by meson field in PICR hydrodynamic model[J]. The European Physical Journal C, 2021, **81**(1): 12. DOI: 10.1140/epjc/s10052-021-08828-z.

100 Deng X G, Huang X G, Ma Y G. Lambda polarization in ^{108}Ag+^{108}Ag and ^{197}Au+^{197}Au collisions around a few GeV [J]. Physics Letters B, 2022, **835**: 137560. DOI: 10.1016/j.physletb.2022.137560.

101 Alzhrani S, Ryu S, Shen C. Λ spin polarization in event-by-event relativistic heavy-ion collisions[J]. Physical Review C, 2022, **106**(1): 014905. DOI: 10.1103/physrevc.106.014905.

102 Yi C, Pu S, Gao J H, *et al*. Hydrodynamic helicity polarization in relativistic heavy ion collisions[J]. Physical Review C, 2022, **105**(4): 044911. DOI: 10.1103/physrevc.105.044911.

103 Li H, Xia X L, Huang X G, *et al*. Global spin polarization of multistrange hyperons and feed-down effect in heavy-ion collisions[J]. Physics Letters B, 2022, **827**: 136971. DOI: 10.1016/j.physletb.2022.136971.

104 Xia X L, Li H, Huang X G, *et al*. Feed-down effect on Λ spin polarization[J]. Physical Review C, 2019, **100**(1): 014913. DOI: 10.1103/physrevc.100.014913.

105 Becattini F, Buzzegoli M, Palermo A, *et al*. Local polarization and isothermal local equilibrium in relativistic heavy ion collisions[J]. Physical Review Letters, 2021, **127**(27): 272302. DOI: 10.1103/physrevlett.127.272302.

106 Fu B C, Liu S Y F, Pang L G, *et al*. Shear-induced spin polarization in heavy-ion collisions[J]. Physical Review Letters, 2021, **127**(14): 142301. DOI: 10.1103/PhysRevLett.127.142301.

107 Dong L H, Lin S. Dilepton helical production in a vortical quark-gluon plasma[J]. The European Physical Journal A, 2022, **58**(9): 176. DOI: 10.1140/epja/s10050-022-00818-3.

108 Tuchin K. Magneto-rotational dissociation of heavy hadrons in relativistic heavy-ion collisions[J]. Physics Letters B, 2021, **820**: 136582. DOI: 10.1016/j.physletb.2021.136582.

109 Wei M H, Islam C A, Huang M. Production rate and ellipticity of lepton pairs from a rotating hot and dense QCD medium[J]. Physical Review D, 2022, **105**(5): 054014. DOI: 10.1103/physrevd.105.054014.